MATHEMATIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

# Proseminar Endliche Coxeter-Gruppen

## Sommersemester 2022

**Jun.-Prof. Dr. Caroline Lassueur**
AG Algebra, Geometrie und Computeralgebra

**Proseminarbörse, 3. Februar 2022**

**THEMA.**
In diesem Proseminar werden wir eine wichtige Klasse von endlichen Gruppen klassifizieren:

Die **endlichen Coxeter-Gruppen**.

**Die wichtigsten Werkzeuge.**

- Elementare Gruppentheorie
- Lineare Algebra bzw. Geometrie in $\mathbb{R}^n$
- Graphentheorie

**Inhaltliche Voraussetzungen.**
*Lineare Algebra (GDM)* und *Algebraische Strukturen*.

# Klassifikationen algebraischer Strukturen

In der Algebra möchtet man bestimmte algebraische Strukturen bis auf Isomorphie verstehen:

$$\text{Gruppen, Ringe, Körper, } \ldots$$

Allerdings ist es z.B. i.A. nicht möglich alle Gruppe zu klassifizieren. Aus diesem Grund studiert man **kleinere Klassen von Gruppen mit gemeinsamen Eigenschaften**, die gleichzeitig sind:

(1) gross genug, um Interessant zu sein, und
(2) klein genug, um eine Klassifikation zu erhalten.

## Beispiel (AGS, relativ einfach)

Die zyklischen Gruppen sind isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

## Informelle Definition

Eine **Coxeter-Gruppe** ist eine Gruppe $W$ mit:

1. Erzeuger: $s_1, \ldots, s_n$ ($n \in \mathbb{N}$)
2. Relationen: $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \; \forall \, i \leq j$ mit $m_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq n$ und $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$ für $i < j$, d.h.

$$W = \langle s_1, \ldots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \; \forall \, i \leq j \rangle \, .$$

## Eigenschaft

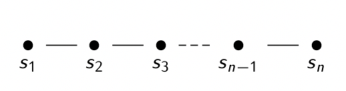
Jede Coxeter-Gruppe läßt sich mit Hilfe eines Graphen darstellen.

## BEISPIEL: Die Symmetrische Gruppe

Die Symmetrische Gruppe $S_{n+1}$ ist Coxeter-Gruppe mit

- Erzeuger: $s_1 := (1\,2), \ldots, s_n := (n\ n+1)$
- Relationen:
  $s_i^2 = 1\ \forall 1 \leq i \leq n$,
  $(s_i s_j)^2 = 1$ falls $i \leq j - 2$,
  $(s_i s_{i+1})^3 = 1\ \forall 1 \leq i \leq n-1$

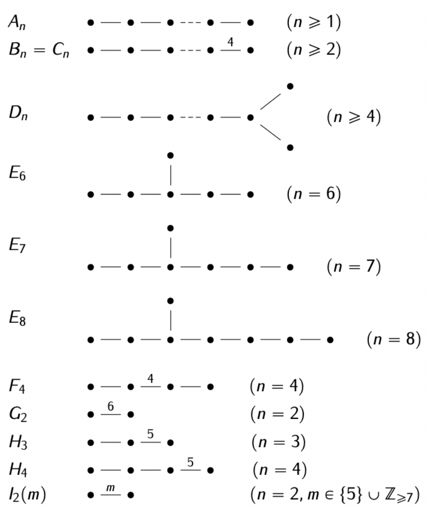
und mit Graphen:



## ZIEL

Das Ziel dieses Proseminar ist es die **endlichen** Coxeter-Gruppen zu klassifizieren, durch ihre Graphen.

## Klassifikationssatz



# Verbindungen mit weiteren Vorlesungen

Die **Coxeter-Gruppen** sind sind allgegenwärtig in der modernen Algebra und erlauben Klassifikationen weiterer algebraicher Strukturen.

Diese Gruppen spielen eine wichtige Rolle in den folgenden Vorlesungen:

- **Spiegelungsgruppen** (Reflection Groups);
- **Algebraische Gruppen**;
- **Lie-Algebren**.

# Literatur

Wir folgen meine Seminarnotizen aus dem WS 2019/20.

**Leistungsnachweis.**

1. Selbständige Vorbereitung von 2 Vorträge
   (Tafel oder Folien / 45-60 Minuten).
2. Gute Vorträge.

**Unterstützung/Sprechstunde.**
Bei Fragen während der Vorbereitung der Vorträge stehe ich zur Verfügung:
Online/Präsenz-Sprechstunde nach Vereinbarung.

# Anmeldung & Vorbesprechung

**Anmeldung.**
Im URM: Proseminar Endliche Coxeter-Gruppen.
Bis zum 18. Februar 2022.

**Vorbesprechung.**
Die Vorbesprechung wird Online stattfinden.
Einen Link zur Terminfindung schicke ich Ihnen nach Meldeschluss am 18. Februar.

**Fragen/Kontakt.**
lassueur@mathematik.uni-kl.de