Einführung in die Funktionentheorie

Caroline Lassueur
TU Kaiserslautern

Kurzskript zur Vorlesung, WS 2017/18
(Länge: 13 Wochen, 2 SWS)

Version: 6. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Text ist ein Kurzskript für die Vorlesung **Funktionentheorie, Wintersemester 2017/18**. Der generelle Schreibstil dieses Skriptes ist bewusst knapp gehalten, da es schon viele Skripte für diese Vorlesung gibt, die zur Verfügung stehen, z.B. durch die Skriptensammlung der Fachschaft Mathematik: `https://fachschaft.mathematik.uni-kl.de/misc/lecturenotes.php`

Genauer basiert dieses Skript auf früheren Fassungen der Vorlesung von G. Malle [Mal10], M. Barakat [Bar14] und A. Gathmann [Gat16].

[Bar14] Mohammed Barakat, Funktionentheorie, Skript zur Vorlesung im WS 2013/14, TU Kaiserslautern, 2014.

[Gat15] Andreas Gathmann, Funktionentheorie, Skript zur Vorlesung im WS 2015/16, TU Kaiserslautern, 2016.

[Mal10] Gunter Malle, *Einführung in die Funktionentheorie*, Skript zur Vorlesung im WS 2009/10, TU Kaiserslautern, 2010.

Ich danke Gunter Malle für die Verfügbarkeit seines Skriptes und Ulrike Faltings für das Lesen dieser Fassung des Skriptes und ausführliche Korrekturen. Ich danke auch den Studierenden, die verschiedene Arten von Druckfehler gemeldet haben. Ich werde unten eine Errata updaten, falls weiteren Fehler gemeldet werden sollten. Weitere Kommentare und Korrekturen sind auch herzlich willkommen!

Kapitel 0: Grundlagen

Zunächst erinnern wir an einige Grundtatsachen über den Körper der komplexen Zahlen und über die Konvergenz von Folgen und Reihen. Die Beweise der Sätze und Beispiele werden während der Präsenzübung in der 2. Vorlesungswoche wiederholt. Sonst nehmen wir an, dass die Begriffe und Konzepte dises Kapitels in der GDM-Vorlesung studiert wurden.

1 Der Körper der komplexen Zahlen

Die Menge $\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ zusammen mit der Addition

$$\begin{array}{rccl} +: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) & \mapsto & (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{array}$$

und mit der Multiplikation

$$\begin{array}{rccl} \cdot: & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) & \mapsto & (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{array}$$

bildet einen Körper, den sogenannten **Körper der komplexen Zahlen**.

Anmerkung 1.1

(a) Es gilt insbesondere $i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = -1$.
In der Tat hat die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen: i ist eine der beiden Lösungen, und $-i$ ist die andere.

(b) Das Nullelement ist $0 = 0 + i \cdot 0$ und das Einselement ist $1 = 1 + i \cdot 0$. Für $x + iy \neq 0$ ist

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{1 \cdot (x - iy)}{(x + iy) \cdot (x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

das Inverse von $x + iy$.

(c) Als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$ via die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x + iy & \mapsto & (x, y)\,. \end{array}$$

Außerdem kann $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ via den (injektiven) Körperhomomorphismus

$$\iota : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x + i \cdot 0 \end{array}$$

betrachtet werden.

Definition 1.2 (*Realteil, Imaginärteil, komplex konjugierte Zahl, Betrag*)

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (also $x, y \in \mathbb{R}$) ist:

$\operatorname{Re} z := x$ der **Realteil** von z;

$\operatorname{Im} z := y$ der **Imaginärteil** von z;

$\overline{z} := x - iy$ die zu z **komplex konjugierte Zahl**; und

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ der **Betrag** von z.

Bemerkung 1.3

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
Konsequenz: die komplexe Konjugation $\overline{} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist ein Körperautomorphismus.

(c) $\overline{\overline{z}} = z$ und $|z| = |\overline{z}|$.

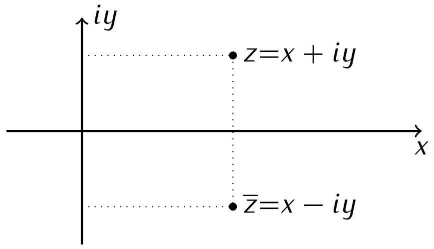
(d) $|zw| = |z| \cdot |w|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung), und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(e) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, und $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

(f) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ und $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$.

Beweis: Siehe Präsenzübung. (Direktes Nachrechnen.) ■

Bildlich können wir durch die Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ komplexe Zahlen als Punkte der **komplexen Zahlenebene** darstellen. Komplexe Konjugation entspricht dann Spiegelung an der x-Achse:



2 Konvergenz von Folgen und Reihen

Die obigen Eigenschaften zeigen: zusammen mit dem Betrag $|\,.\,|$ wird $\mathbb{C}$ ein metrischer Raum und wir können $(\mathbb{C}, |\,.\,|)$ mit dem euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, ||\,.\,||_2)$ identifizieren.

Dies erlaubt uns die aus den Grundlagen der Mathematik bekannten (topologischen) Begriffe aus der 2-dimensionalen Analysis (wie etwa Umgebung, offen, abgeschlossen, zusammenhängend, Konvergenz von Folgen und Reihen, absolute Konvergenz von Reihen, Stetigkeit, ...) auf $\mathbb{C}$ zu übertragen.

Bei Kriterien und Sätzen, in die zusätzlich die multiplikative Struktur des Körpers $\mathbb{C}$ eingeht, wie etwa beim Quotienten- bzw. Wurzelkriterium, müßte man sie streng genommen für $\mathbb{C}$ nochmal beweisen, aber die Beweise aus der reellen Analysis lassen sich nahezu Wort für Wort übertragen. Siehe Präsenzübung in der 2. Vorlesungswoche.

Definition 2.1 (*Konvergenz von Folgen und Reihen*)

(a) Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ komplexer Zahlen heißt **konvergent gegen** $z \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

gilt. Dann heißt z der **GrenzwertGrenzwert** der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, oder $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$, oder einfach $z_n \longrightarrow z$.

(b) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexer Zahlen heißt **konvergent mit Summe (oder Wert)** $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$ konvergiert gegen z. Wir schreiben dann auch

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} z_k \right) = \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Bemerkung 2.2

Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(a) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen z, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re} z$ bzw. $\operatorname{Im} z$ konvergieren.

(b) Aus $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ folgt $\overline{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \overline{z}$ (d.h. Grenzwertbildung vertauscht mit komplexer Konjugation).

Beweis: Siehe Präsenzübung (Blatt 0). ■

Bemerkung 2.3

Der metrische Raum $\mathbb{C}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ hat einen Grenzwert.

Beweis: Verwende einfach die entsprechende Aussage für $\mathbb{R}^2$. (Dies ist unabhängig von der Multiplikation in $\mathbb{C}$.) Siehe GDM-Vorlesung. ■

Beispiel 1

(a) Die geometrische Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und es gilt in diesem Fall:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(b) Erinnerung: Durch Umordnung einer konvergenten Reihe kann sich der Grenzwert ändern!! Z.B. sind die Reihen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Umordnungen voneinander. (2. Reihe: 2x ungerader Nenner gefolgt von 1x gerader Nenner usw.) Sie sind konvergent, haben aber die verschiedenen Grenzwerte

$$\ln 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{3}{2}\ln 2\,.$$

Will man, unabhängig von Umordnung, immer denselben Grenzwert erhalten, so braucht man, dass die Reihe *absolut* konvergiert.

Definition 2.4 (*absolut konvergente Reihe*)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ komplexer Zahlen heißt **absolut konvergent**, falls die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert (in $\mathbb{R}$).

Bemerkung 2.5

Jede absolut konvergente komplexe Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert und es gilt $|\sum_{n=0}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$

Beweis: Wir setzen voraus, dass der entsprechende Satz im Reellen bekannt ist. Die Behauptung folgt dann aus Bemerkung 2.2. ∎

Bemerkung 2.6

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ eine komplexe Reihe. Dann gelten:

(a) **Quotientenkriterium**: Gibt es eine reelle Zahl $0 < q < 1$, sodass fast immer gilt $z_n \neq 0$ und $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \leq q$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent.
Gilt hingegen fast immer $z_n \neq 0$ und $|\frac{z_{n+1}}{z_n}| \geq 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent.

(b) **Wurzelkriterium**: Ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent; und ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent.

Beweis: Siehe Präsenzübung. ∎

3 Die komplexe Exponentialfunktion

Mit Hilfe von Bemerkung 2.5 kann man viele elementare Funktionen ins Komplexe fortsetzen. Wir betrachten hier insbesondere die Exponentialfunktion, den Sinus und den Kosinus.

Lemma 3.1

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

absolut.

Beweis: Für $z = 0$ ist die Aussage klar. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \middle/ \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ nach dem Quotientenkriterium absolut. Für $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ siehe Blatt 1. ■

Definition 3.2 (*komplexe Exponentialfunktion*)

Für $z \in \mathbb{C}$ nennt man

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

komplexe Exponentialreihe. Die Funktion

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \exp(z) := e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$$

nennt man die **komplexe Exponentialfunktion**.
(Lemma 3.1 zeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion wohldefiniert ist.)

Bemerkung 3.3

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

(a) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: (a) Folgt direkt aus dem Multiplikationssatz. (GDM)

(b)

$$e^{\overline{z}} \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{\overline{z}^n}{n!}\right) \overset{1.3(b)}{=} \lim_{N\to\infty}\overline{\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} \overset{2.2(b)}{=} \overline{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}} \overset{\text{Def.}}{=} \overline{e^z}\,.$$

■

Analog zum reellen Fall definieren wir die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion.

Definition 3.4 (*Sinus, Kosinus*)

Die Funktionen

$$\begin{array}{rccl} \cos: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} \sin: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \sin z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$$

heißen **komplexer Kosinus** bzw. **komplexer Sinus**. (Lemma 3.1 zeigt, dass beide Funktionen wohldefiniert sind.)

Lemma 3.5 (*Eulersche Formel*)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,.$$

Beweis: (Analog zum rellen Fall). Aus $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$ folgt

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wende nun $\lim_{n\to\infty}$ auf beide Seite an. ■

Folgerung 3.6 (*Aufgabe 1, Blatt 1*)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

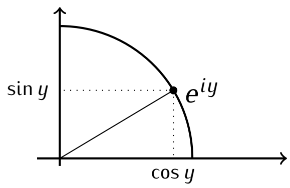
(a) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$;

(b) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$;

(c) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, also $\operatorname{Re} e^z = e^x\cos y$, $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$ und $|e^z| = e^x$.

Anmerkung 3.7

Erinnerung: Für $y \in \mathbb{R}$ gilt $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, also $\cos y = \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$ sowie $\sin y = \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$ nach Bemerkung 1.3(a).



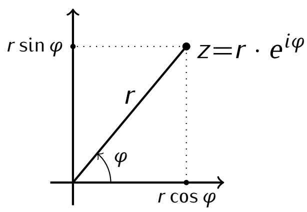
Aber **Vorsicht**: für $z \in \mathbb{C}$ gelten i.A. **nicht** $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$ und $\sin z = \operatorname{Im} e^{iz}$.

Anmerkung 3.8 (*Polarkoordinaten*)

Die obigen Formeln führen auf die **Polarkoordinatendarstellung** von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: Sei $r := |z|$, also $|\frac{z}{r}| = 1$ und $\frac{z}{r} = e^{i\varphi}$ für einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\,.$$

Dabei heißt φ das **Argument** oder den **Winkel** von z; die Zahlen r, φ heißen die **Polarkoordinaten** von z.



Die Multiplikation komplexer Zahlen nimmt in der Polardarstellung eine besonders einfache Form an: für $z_1 := r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 := r_2 e^{i\varphi_2}$ ($\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$) ist

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\,,$$

wobei $\varphi_1 + \varphi_2$ evtl. anschließend modulo 2π reduziert werden sollte. Also werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert (modulo 2π).
Beispielsweise entspricht die Multiplikation mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Beispiel 2 (*Einheitswurzeln*)

Wie schon angekündigt, werden wir im Verlauf der Vorlesung beweisen, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, d.h., dass jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

Wir betrachten hier das Polynom $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, hat $X^n - 1$ höchstens n Nullstellen. Aber $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ ist eine Nullstelle für alle $0 \leq k \leq n-1$, da

$$(e^{\frac{2\pi i k}{n}})^n = e^{2\pi i k} = (e^{2\pi i})^k = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^k = 1^k = 1\,.$$

Diese sind verschieden und bilden die Eckpunkte eines regulären n-Ecks auf den Einheitskreis.

Wir nennen diese Zahlen **n-ten Einheitswurzeln**. Wir erhalten also die Zerlegung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{\frac{2\pi i}{n}}) \cdots (X - e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}})$$

in Linearfaktoren.

4 Stetigkeit und komplexe Differenzierbarkeit

Wir betrachten nun lokale Eigenschaften komplexer Funktionen, nämlich die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit.
Die komplexe Differenzierbarkeit wird das *Hauptwerkzeug* für die Vorlesung sein.

Erinnerung: Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{D}$ ein Punkt im Abschluß von D in $\mathbb{C}$. Dann heißt $c \in \mathbb{C}$ **Grenzwert** von $f(z)$ für $z \longrightarrow a$, falls:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, z \in D \text{ mit } |z-a| < \delta \text{ ist } |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann $\lim_{z \to a} f(z) = c$ oder $f(z) \longrightarrow c$ für $z \longrightarrow a$.

Lemma-Definition 4.1 (*Stetigkeit*)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **stetig in** $a \in D$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) $f(z) \longrightarrow f(a)$ für $z \longrightarrow a$;

(2) für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $z_n \longrightarrow a$ gilt $f(z_n) \longrightarrow f(a)$;

(3) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall\, z \in D$ mit $|z-a| < \delta$ ist $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

Die Funktion f heißt **stetig auf** D, wenn sie in jedem $a \in D$ stetig ist.

Beispiel 3

Summen, Produkten, Quotienten (mit Nenner $\neq 0$), Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig. (Siehe GDM-Vorlesung.)

Notation: Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Für $z \in D$ setze

$$f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$$

mit $u = \operatorname{Re} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $v = \operatorname{Im} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 4.2

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Genau dann ist die Funktion f stetig, wenn ihr **Realteil** $\operatorname{Re} f$ und ihr **Imaginärteil** $\operatorname{Im} f$ stetig sind.

Beweis: Dies folgt direkt aus Lemma-Definition 4.1(2) und Bemerkung 2.2(a). (Siehe auch GDM.) ■

Beispiel 4

(a) Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist stetig, da die Funktionen $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} f(z) = -\operatorname{Im} z$ stetig sind.

(b) Die komplexe Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z$ ist stetig, da für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,,$$

wobei $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ und $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$ stetig sind.

(c) Alle Polynome und rationalen Funktionen in $z, \overline{z}$ sind stetig nach (a) und Beispiel 3.

Definition 4.3 (*komplex differenzierbare Funktion, holomorphe Funktion, ganze Funktion*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, und $a \in D$. Dann heißt f:

(a) **komplex differenzierbar** in a, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{z \in D \setminus \{a\} \\ z \to a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die **Ableitung** von f in a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet.

(b) **holomorph in** a, wenn sie in einer offenen Umgebung von a komplex differenzierbar ist.

(c) **holomorph auf** D, wenn sie in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.

(d) **ganz**, wenn sie holomorph auf $D = \mathbb{C}$ ist.

Wie beim Reellen beweist man:

Bemerkung 4.4 (*Rechenregeln für komplexe Ableitungen*)

Seien $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a \in D$. Dann gelten:

(a) **Linearitätsregel**: $\alpha f + \beta g$ ist komplex differenzierbar in a für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit Ableitung $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

(b) **Produktregel**: $f \cdot g$ ist komplex differenzierbar in a mit Ableitung $(f \cdot g)'(a) = (f' \cdot g + f \cdot g')(a)$.

(c) **Quotientenregel**: Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ komplex differenzierbar in a mit Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)(a)\,.$$

(d) **Kettenregel**: Ist $f(D) \subseteq D'$ und $h : D' \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(a)$, so ist auch $h \circ f$ komplex differenzierbar in a mit Ableitung $(h \circ f)'(a) = h'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Beispiel 5

(a) Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, und $a \in D$. Ist f komplex differenzierbar in a, so ist f stetig in a. (Siehe GDM.)

(b) Aus Bemerkung 4.4 folgt, dass $\mathbb{C}$-Linearkombinationen, Produkte, Quotienten und Verkettungen holomorpher Funktionen wieder holomorph sind (d.h. mit den Voraussetzungen von Bemerkung 4.4).

(c) Die identische Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit Ableitung

$$f'(a) = \lim_{\substack{z \in \mathbb{C}\setminus\{a\} \\ z \to a}} \frac{z-a}{z-a} = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{C}\,.$$

(d) Polynomfunktionen sind ganz; rationale Funktionen sind komplex differenzierbar außerhalb der Nullstellen des Nenners. (Folgt z.B. auch aus Bemerkung 4.4 zusammen mit (c).)

(e) Aufgabe 3, Blatt 1: Die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$ ist nur in $a = 0$ komplex differenzierbar.

(f) Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ ist in **keinem** Punkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

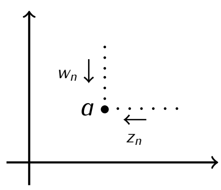
Beweis: Verwende zwei verschiedenen Folgen. Für $a \in \mathbb{C}$ fest sei:

1. $z_n := a + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a} + \frac{1}{n} - \overline{a}}{a + \frac{1}{n} - a} = 1$$

2. $w_n := a + \frac{i}{n}$ $(n \geq 1)$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n) - f(a)}{w_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a} - \frac{i}{n} - \overline{a}}{a + \frac{i}{n} - a} = -1$$



Also existiert der Grenzwert in Definition 4.3 nicht, und die Funktion f ist nicht in a komplex differenzierbar. ■

Aber Vorsicht! Vergleiche mit Situation in $\mathbb{R}^2$: Hier ist die komplexe Konjugation die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, -y)\,,$$

die offensichtlichtlich reell differenzierbar ist, da die beiden Koordinaten einzeln reell differenzierbar sind.

Moralität: $\boxed{\text{komplexe Differenzierbarkeit} \;\neq\; \text{reell 2-dimensionale Differenzierbarkeit !}}$

Um den Unterschied zwischen komplexer differenzierbarkeit und reell 2-dimensionaler differenzierbarkeit zu verstehen, brauchen wir die sogenannten *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*:

Satz 4.5 (***Cauchy-Riemann Differentialgleichungen***)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, und $a \in D$. Für $z = x + iy \in D$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ setze $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist komplex differenzierbar in a;

(ii) f ist reell differenzierbar in a, und es gelten die **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen** (CRD)

$$u_x(a) = v_y(a) \qquad \text{und} \qquad u_y(a) = -v_x(a)\,,$$

wobei $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, u_y := \frac{\partial u}{\partial y}, v_x := \frac{\partial v}{\partial x}, v_y := \frac{\partial v}{\partial y}$.

In diesem Fall ist $f'(a) = u_x(a) + iv_x(a)$.

Beweis: Die folgenden Aussagen sind aus den Grundlagen der Mathematik bereits bekannt:

(1) Nach Definition ist f in $a = a_1 + ia_2 \in D$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) genau dann reell differenzierbar, wenn es eine Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und eine Funktion $r : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(a) + A \cdot \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z\to a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0\,, \tag{$*$}$$

wobei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Außerdem kann dabei A nur die Jacobi-Matrix von f in a sein, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} (a).$$

(2) Die komplexe Differenzierbarkeit von f in a ist äquivalent zu: $\exists\, c \in \mathbb{C}$, $\tilde{r} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + c(z - a) + \tilde{r}(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z\to a} \frac{\tilde{r}(z)}{z - a} = 0, \ \text{wobei } c = f'(a)\,. \tag{$**$}$$

Nun: für $c = c_1 + ic_2$, $z = x + iy$, und $a = a_1 + ia_2$ (mit $c_1, c_2, x, y, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) gilt

$$\begin{aligned} c(z - a) &= (c_1 + ic_2)((x - a_1) + i(y - a_2)) \\ &= (c_1(x - a_1) - c_2(y - a_2)) + i\,(c_2(x - a_1) + c_1(y - a_2))\ , \end{aligned}$$

so dass in $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(c(z - a)) \\ \mathrm{Im}(c(z - a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(x - a_1) - c_2(y - a_2) \\ c_2(x - a_1) + c_1(y - a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Unterschied zwischen den Formeln ist die unterschiedliche Formulierung der Grenzwerteigenschaft in (1) und (2). Die Bedingungen stellen sich aber als äquivalent heraus, denn eine Folge in $\mathbb{R}^2$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn die Folge ihrer Beträge gegen 0 konvergiert. Also:

$$\lim_{z\to a} \frac{r(z)}{z - a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to a} \left|\frac{r(z)}{z - a}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0\,.$$

Damit erhalten wir:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir nehmen an, dass f komplex differenzierbar in a ist, so dass ($**$) gilt. Das obige Argument liefert, dass ($*$) gilt und $u_x(a) = v_y(a), u_y(a) = -v_x(a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist umgekehrt f reell differenzierbar in a und die CRD sind erfüllt, so gilt $(*)$ zusammen mit

$$u_x(a) = v_y(a) \qquad \text{und} \qquad u_y(a) = -v_x(a)\,.$$

Also setze $c_1 := u_x(a)$, $c_2 := v_x(a)$. Daher gilt $(**)$, so dass f komplex differenzierbar in a ist.

Schließlich haben wir gesehen, dass $f'(a) = c = c_1 + ic_2 = u_x(a) + iv_x(a)$ ist. ∎

Beispiel 6

(a) Wir betrachten erneut die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$.
Hier gilt $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -y$. Also ist für alle $a \in \mathbb{C}$

$$u_x(a) = 1 \neq -1 = v_y(a)\,.$$

Damit folgt aus Satz 4.5, dass f **nirgends** komplex differenzierbar ist, trotz der Tatsache, dass f reell differenzierbar ist.

(b) Sei nun $f = \exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z$. Nach Folgerung 3.6 gilt

$$u(x, y) = \operatorname{Re} e^{x+iy} = e^x \cdot \cos y \qquad \text{und} \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} e^{x+iy} = e^x \cdot \sin y\,.$$

Offensichtlich sind u, v reell differenzierbar. Weiter gilt

$$u_x = e^x \cdot \cos y = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -e^x \cdot \sin y = -v_x\,.$$

Also sind die CRD überall erfüllt und damit ist die komplexe Exponentialfunktion überall komplex differenzierbar, d.h. ganz. Außerdem gilt:

$$\exp'(z) = u_x(z) + iv_y(z) = u(z) + iv(z) = e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

(c) Der komplexe Sinus $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ ist nach (b) und Bemerkung 4.4 (Rechenregeln) holomorph auf $\mathbb{C}$, mit Ableitung

$$\sin'(z) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Genauso erhält man, dass der komplexe Kosinus holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, mit Ableitung

$$\cos'(z) = -\sin z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

5 Die Wirtinger-Ableitungen

In §3 haben wir gesehen, dass Polynome in z komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}$ sind, aber hingegen ist die komplexe Konjugation nirgends komplex differenzierbar. Intuitiv, sieht es so aus, dass eine komplexwertige Funktion komplex differenzierbar ist, wenn sie "nicht von $\overline{z}$ abhängt". Diese Idee wird eine andere Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit liefern.

Notation: In diesem Abschnitt ist $D \subseteq \mathbb{C}$ stets eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir stets $z = x + iy$, und wir setzen:

$$f := u + i \cdot v\,, \text{ wobei } u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} := u_x + i \cdot v_x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} := u_y + i \cdot v_y\,.$$

Definition 5.1 (*Wirtinger-Ableitungen*)

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. Dann heißen die Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

die **Wirtinger-Ableitungen** von f.

Die obigen Definitionen der partiellen Ableitungen nach $x, y, z,$ und $\overline{z}$ werden durch das folgende Lemma (zusammen mit seinem Beweis) motiviert. Dies liefert die Beziehung zwischen den CRD und den Wirtinger-Ableitungen.

Lemma 5.2

Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar in $a \in D$, so gilt:

$$u, v \text{ erfüllen in } a \text{ die CRD} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0\,.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
u, v \text{ erfüllen in } a \text{ die CRD} \quad &\Longleftrightarrow \quad u_x(a) = v_y(a) \quad \text{und} \quad u_y(a) = -v_x(a)\\
&\Longleftrightarrow \quad u_x(a) + iv_x(a) = v_y(a) - iu_y(a)\\
&\Longleftrightarrow \quad u_x(a) + iv_x(a) = -i(u_y(a) + iv_y(a))\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = 0\\
&\overset{\text{Def 5.1}}{\Longleftrightarrow} \quad 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0\,.
\end{aligned}$$

■

Satz 5.3

Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $a \in D$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist komplex differenzierbar in a;

(ii) f ist reell differenzierbar in a und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0$.

Beweis: Mit Lemma 5.2 ist Satz 5.3 einfach eine Umformulierung von Satz 4.5. ■

Bemerkung 5.4 (*Rechenregeln für die Wirtinger-Ableitungen*)

(a) Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a \in D$, so gilt $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

(b) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}$ und $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z}$.

(c) Die Wirtinger-Ableitungen erfüllen die Linearitätsregel, die Produktregel, und die Quotientenregel. Genauer: mit den offensichtlichen Voraussetzungen (siehe Bemerkung 4.4) für reell differenzierbare Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gelten:

- **Linearitätsregel**:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \beta\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$$

  für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- **Produktregel**:

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\,.$$

- **Quotientenregel**:

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}\right) \Big/ g^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(f/g)}{\partial \overline{z}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right) \Big/ g^2\,.$$

Beweis: (a) Da f komplex differenzierbar in a ist, gelten die CRD nach Satz 4.5, d.h. $u_x(a) = v_y(a)$ und $u_y(a) = -v_x(a)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(a) &\overset{\text{Def 5.1}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \frac{1}{2}\left(u_x + i \cdot v_x - i(u_y + i \cdot v_y)\right)(a) \\
&= \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right)(a) \\
&\overset{\text{CRD}}{=} \frac{1}{2}(2u_x + 2iv_x))(a) \\
&= u_x(a) + iv_x(a) \overset{\text{Satz 4.5}}{=} f'(a)
\end{aligned}$$

(b) Setze $f(z) = z$ bzw. $f(z) = \overline{z}$ in Definition 5.1 ein.
(c) ergibt sich durch Nachrechnen. ■

Beispiel 7

(a) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$. Nach Bemerkung 8.4(c) gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{\overline{z}^2} \neq 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist f nirgends komplex differenzierbar nach Satz 5.3.

(b) Wir können auch erneut die Realteilfunktion und die Imaginärteilfunktion betrachten. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \operatorname{Re} z = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}(z + \overline{z})\right) \overset{\text{Bem 5.4(c)}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} \overset{\text{Bem 5.4(b)}}{=} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\,, \text{ nirgends } 0\,.$$

Analog ist $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \operatorname{Im} z = \frac{i}{2}$, nirgends 0.
Damit folgt aus Satz 5.3, dass die Funktionen

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Im} z$$

nirgends komplex differenzierbar sind.

Kapitel 2: Integralsätze

Nach der Differenzierbarkeit möchten wir nun die Integrierbarkeit studieren.

Definition 5.5 (*Stammfunktion*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine holomorphe Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$ heißt **Stammfunktion** von f auf D.

Im Reellen erhalten wir Stammfunktionen durch Integration. So ist es jetzt wieder.

6 Komplexe Kurvenintegrale

Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$, wo man über ein Intervall integrieren kann, gibt es solche „natürlichen“ 1-dimensionalen Teilmengen in $\mathbb{C}$ nicht. Stattdessen integriert man allgemein längs „Wegen“. Dies liefert das Konzept des *Integrals einer Funktion entlang einer Kurve*.

Im Folgenden bezeichne

$$I := [a, b] \subset \mathbb{R} \quad \text{mit } a < b \in \mathbb{R}$$

ein kompaktes reelles Intervall.

Definition 6.1 (*Weg*)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Ein **Weg** (oder eine **Kurve**) in D ist eine stetige Abbildung $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow D$.
Der Weg γ heißt:

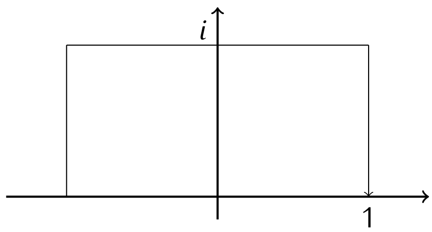
- **geschlossener** Weg, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.
- **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ stetig differenzierbar für alle $1 \leq i \leq n$ ist.
- **Jordankurve**, falls γ injektiv und geschlossen ist.

Ferner heißt $\gamma(a)$ **Anfangspunkt** von γ, und $\gamma(b)$ **Endpunkt** von γ. Die Menge $\gamma(I) \subset \mathbb{C}$ nennt man die **Spur** des Weges γ.

Beispiel 8

(a) Der Weg

$$\gamma : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{C},\, t \mapsto \begin{cases} -1 + i(2 + t) & t \in [-2, -1], \\ i + t, & t \in [-1, 1], \\ 1 + i(2 - t) & t \in [1, 2]. \end{cases}$$



ist stückweise stetig differenzierbar.

(b) Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Der Weg $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto r \cdot e^{2\pi i t}$ ist geschlossen und stetig differenzierbar. Seine Spur ist der zentrierte Kreis vom Radius r in $\mathbb{C}$.

Konvention: Ab jetzt sind alle Wege (Kurven) stückweise stetig differenzierbar.

Definition 6.2 (*Bogenlänge*)

Die **Bogenlänge** eines Weges $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt\,.$$

Beachte: Da γ auf I nur stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, ist γ' an den Nahtstellen im Allgemeinen nicht definiert. Der Integrand ist also nur auf $I \setminus \{t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ definiert, aber dort stetig. Damit bleibt das Integral wohldefiniert. (Siehe GDM.)
Diese Definition der Bogenlänge ergibt tatsächlich Sinn, da sie von der konkreten Parametrisierung des Weges unabhängig ist. (Siehe unten.)

$L(\gamma)$ ist die intuitive Länge von γ, Grenzwert der Länge von stückweise linearen Approximationen. D.h.: intuitiv, mit Hilfe der Substitution $z := \gamma(t)$, erhalten wir "$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\frac{dz}{dt}| dt = \int_a^b |dz|$".

Beispiel 9

Sei $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto r \cdot e^{2\pi i t}$ ($r \in \mathbb{R}_{>0}$) wie in Beispiel 8(b). Nach Definition gilt

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |2\pi i r e^{2\pi i t}| dt = \int_0^1 2\pi r dt = 2\pi r\,,$$

wie erwartet, da die Spur von γ ein Kreis vom Radius r ist.

Definition 6.3 (*Integrierbarkeit, Wegintegral*)

(a) Eine komplexwertige Funktion $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist **integrierbar auf I**, falls die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf I integrierbar sind. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt\,.$$

(b) Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I \longrightarrow D$ ein Weg, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine auf der Spur von γ stetige Funktion. Das **Wegintegral** (oder **Kurvenintegral**) **von f entlang des Weges** γ (oder **längs** γ) ist definiert als

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Beachte: Die Integrale in der Definition existieren (als Riemann-Integrale), da γ stückweise stetig differenzierbar ist.

Beispiel 10

(a) Seien $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ und $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto tz_0$ der gerade Weg von 0 nach $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (tz_0)^2 z_0 dt = z_0^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} z_0^3\,.$$

(b) Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ und den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$, also den Rand des Kreises mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi\,.$$

Man beachte, dass der Wert unabhängig von r ist! Ferner hat der Pol der Funktion $\frac{1}{z}$ bei $z = 0$ kein Problem verursacht.

Definition 6.4

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Weg, $J = [c, d] \in \mathbb{R}$ eine weiteres kompaktes Intervall mit $c < d$, und $\psi : J \longrightarrow I$ stetig differenzierbar mit $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$. Dann heißt

$$\psi^*(\gamma) := \gamma \circ \psi : [c, d] \longrightarrow D$$

der **aus γ durch Umparametrisierung mit ψ entstandene Weg**. Die Abbildung ψ nennt man eine **Umparametrisierung**. Setzt man zusätzlich $\psi' \geq 0$ voraus, so heißt ψ eine **nicht-negative** Umparametrisierung.

Beachte: Die Spuren von γ und $\psi^*(\gamma)$ sind offensichtlich gleich, nur die "Geschwindigkeit des Durchlaufes" ist verschieden.

Bogenlänge und Wegintegrale sind unabhängig von Umparametrisierungen:

Bemerkung 6.5

(a) Ist $\gamma : I \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ ein Weg und ψ eine nicht-negative Umparametrisierung von γ wie in Definition 6.4, so gilt

$$L(\psi^*(\gamma)) = L(\gamma)\,.$$

(b) Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I \longrightarrow D$ ein Weg, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig (auf der Spur von γ), und ψ eine Umparametrisierung von γ wie in Definition 6.4, so gilt

$$\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz\,.$$

Beweis: (a) Es gilt:

$$L(\psi^*(\gamma)) \overset{\text{Def}}{=} \int_J |(\gamma\circ\psi)'(t)|dt = \int_J |(\gamma'(\psi(t))\psi'(t)|dt \overset{\psi'\geq 0}{=} \int_J |(\gamma'(\psi(t))|\psi'(t)dt$$
$$\overset{s:=\psi(t)}{=} \int_{I=\psi(J)} |(\gamma'(s)|ds \overset{\text{Def}}{=} L(\gamma)$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)dz \overset{\text{Def}}{=} \int_c^d f(\psi^*(\gamma)(t))\psi^*(\gamma)'(t)dt &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))(\gamma\circ\psi)'(t)dt\\ &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t)))(\gamma'(\psi(t))\psi'(t)dt\\ &\overset{s:=\psi(t)}{=} \int_{\psi(c)}^{\psi(d)} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds\\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \overset{\text{Def}}{=} \int_\gamma f(z)dz\end{aligned}$$

■

Beachte: Dagegen ändern wir die Richtung des Durchlaufes, also ist $\psi(c) = b$ und $\psi(d) = a$, so wird

$$\int_{\psi^*(\gamma)} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz\,.$$

Die genaue Parametrisierung eines Weges spielt demnach keine Rolle, wohl aber die Orientierung.

Konvention: Für die Orientierung einer Kreislinie wählen wir immer den positiven Drehsinn (d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn), wenn nichts anderes angegeben wird.
Mit dieser Konvention bezeichnet das Symbol $\int_{|z-z_0|=r}$ ein Wegintegral entlang eines entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten und um z_0 zentrierten Kreises vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Anmerkung 6.6

Wegintegrale hängen i.A. nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Weges ab. Betrachte z.B. erneut die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$ und wähle $\widetilde{\gamma} : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, t \longrightarrow 1$. Wegen $\gamma'(t) = 0$ ist $\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz = 0$. Der Wert des Integrals längs $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ in Beispiel 10(b) (mit $r = 1$) war $2\pi i$ und es gilt $\gamma(0) = 1 = \widetilde{\gamma}(a)$ und $\gamma(2\pi) = 1 = \widetilde{\gamma}(b)$.

Es gibt trotzdem viele Fälle, in denen Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Z.B. besagt die folgende Bemerkung, dass Wegintegrale von Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen.

Bemerkung 6.7

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow D$ ein Weg, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Hat f eine Stammfunktion F auf D, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist γ geschlossen, so folgt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Beweis: Es gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = (F \circ \gamma)(t)\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist γ geschlossen, so ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ und damit ist

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(b)) = 0\,.$$

■

Beispiel 11

(a) Aus Anmerkung 6.6 und Lemma 6.7 folgt, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ <u>keine</u> Stammfunktion besitzt, obwohl sie holomorph ist. Dies ist ein grosser Unterschied mit den Reellen!

(b) Seien $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ fest, und $n \in \mathbb{Z}$. Nach Bemerkung 4.4 ist $(z^n)' = nz^{n-1}$, also ist für $n \neq -1$ die Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$. Aus Bemerkung 6.7 und Beispiel 10(b) folgt:

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi i & n = -1. \end{cases}$$

Das Beispiel der Funktion $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zeigt, dass es i.A. keine Umkehrung von Bemerkung 6.7 geben kann. Aber eine gewisse Umkehrung von Bemerkung 6.7 gilt auf geeigneten Teilmengen: die sogenannten Gebiete. Daher definieren wir:

Definition 6.8

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können (d.h. $\forall\ z_1, z_2 \in D$, $\exists$ ein Weg $\gamma : I \longrightarrow D$ mit $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$). Sie heißt **Gebiet**, wenn sie offen und wegzusammenhängend ist.

Folgerung 6.9

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, und $F_1, F_2 : G \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Stammfunktionen von f auf G. Dann ist $F_1 - F_2$ konstant auf G.

Beweis: Sei $F := F_1 - F_2$. Dann gilt $F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ und F ist eine Stammfunktion von F' auf G. Für jeden Weg γ in G folgt

$$0 = \int_\gamma F'(z)dz \overset{\text{Bem 6.7}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Da je zwei Punkte von G durch einen Weg verbunden werden können, muss $F_1 - F_2$ konstant auf G sein. ■

Um unsere Umkehrung von Bemerkung 6.7 für Gebiete zu beweisen, brauchen wir noch die folgende Aufgabe:

Aufgabe 6.10 (*Aufgabe 1, Blatt 3*)

Seien $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\widetilde{\gamma} : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma(b) = \widetilde{\gamma}(c)$. Der **Umkehrweg** von γ ist der Weg

$$\gamma^- : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(a + b - t)$$

und der **Summenweg** (oder der **verkettete** Weg) ist

$$\gamma \oplus \widetilde{\gamma} : [a, b + d - c] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & t \in [a, b], \\ \widetilde{\gamma}(t - b + c) & t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $L(\gamma) = L(\gamma^-)$ und $L(\gamma \oplus \widetilde{\gamma}) = L(\gamma) + L(\widetilde{\gamma})$.

(b) Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine auf den Spuren von γ und $\widetilde{\gamma}$ stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma\oplus\widetilde{\gamma}} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Satz 6.11

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G, so besitzt f eine Stammfunktion auf G.

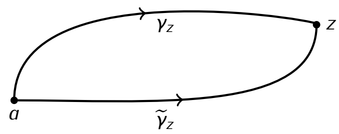
Beweis: Sei $a \in G$ fest. Da G wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem $z \in G$ einen Weg γ_z in G von a nach z wählen und wir definieren

$$\begin{array}{rccc} F: & G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw. \end{array}$$

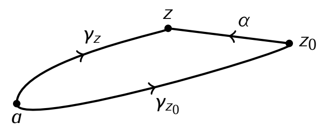
Anmerkung: F hängt nicht von der Wahl von γ_z ab, da das Kurvenintegral über geschlossene Wege verschwindet. Explizit: ist $\widetilde{\gamma}_z$ ein weiterer Weg in G von a nach z, so ist $\gamma_z \oplus (\widetilde{\gamma}_z)^-$ geschlossen. Damit gilt

$$0 = \int_{\gamma_z\oplus(\widetilde{\gamma}_z)^-} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(z)dz - \int_{\widetilde{\gamma}_z} f(z)dz$$

nach Bemerkung 6.7 und Aufgabe 6.10(b).



Behauptung: F ist eine Stammfunktion von f auf G.
Bew.: Sei $z_0 \in G$ beliebig. Zu zeigen: $F'(z_0) = f(z_0)$.
Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $U_\varepsilon(z_0) := \{v \in \mathbb{C} \mid |v - z_0| < \varepsilon\} \subseteq G$ (offene Kreisscheibe um z_0 vom Radius ε). Wähle $z \in U_\varepsilon(z_0)$ und betrachte den geraden Weg $\alpha : [0,1] \longrightarrow G,\, t \mapsto z_0 + t(z - z_0)$:



Nach Definition ist

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma_z} f(w)dw - \int_{\gamma_{z_0}} f(w)dw \overset{\text{Aufg. 6.10(b)}}{=} \int_{(\gamma_{z_0})^- \oplus \gamma_z} f(w)dw = \int_\alpha f(w)dw\,,$$

wobei die letzte Gleichung wegen der Anmerkung gilt. Es folgt:

$$\begin{aligned} F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z - z_0)} \int_\alpha f(w)dw &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(z - z_0)} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt \\ &= \int_0^1 \lim_{z \to z_0} f(z_0 + t(z - z_0))dt \\ &= \int_0^1 f(z_0)dt = f(z_0)\,, \end{aligned}$$

wobei wir Grenzwert und Integral vertauschen dürfen, da der Integrand stetig als Funktion von z und t ist (siehe GDM). ∎

7 Der Cauchysche Integralsatz

Unser Ziel ist es jetzt die Frage „Wann ist das Kurvenintegral nur von Anfangs-, Endpunkt der betrachtenen Kurve abhängig?“ zu beantworten. Dies ohne Stammfunktion suchen zu müssen!
Eine Antwort erhalten wir durch den *Cauchyschen Integralsatz*, der ein zentraler Satz der Vorlesung ist. Dann werden wir im nächsten Kapitel mehrere Folgerungen dieses Satzes untersuchen.

Zur Vorbereitung brauchen wir die folgenden zwei Abschätzungen:

Bemerkung 7.1 (*Standardabschätzung für Wegintegrale*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, und $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ ein Weg in D. Dann gilt

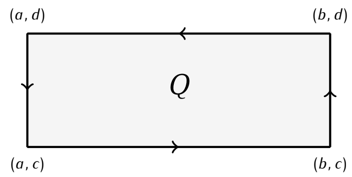
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|\,.$$

Beweis: Es gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt$$
$$\leq \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|dt$$
$$= \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot L(\gamma)\,,$$

wobei das Maximum existiert, weil $|f|$ auf der kompakten Menge $\gamma([a,b])$ stetig ist. ■

Notation: Mit $Q := [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ bezeichnen wir ein Rechteck in $\mathbb{R}^2$:



Ferner schreiben wir ∂Q für den Rand von Q, gesehen als geschl. Weg in $\mathbb{R}^2$ mit positiven Orientierung.

Lemma 7.2

Seien $Q = [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es existiert eine reelle Konstante $M > 0$ mit

$$L\left(\psi(\partial Q)\right) \leq M \cdot L(\partial Q)\,.$$

Beweis: Sei $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ der gerade Weg von (a,c) nach (b,c) und $\gamma := \psi(\rho)$. Bis auf Umparametrisierung können wir annehmen, dass $||\rho'(t)||_2 = 1$ für alle $t \in [a,b]$ ist. Dann gilt

$$L(\gamma) = L\left(\psi(\rho)\right) = \int_a^b |(\psi\circ\rho)'(t)|dt = \int_a^b |(\psi)'(\rho(t))\cdot\rho'(t)|dt\,.$$

Setzen wir

$$M := \max\{|\psi'(z)\cdot w| \,\big|\, z \in Q, w \in \partial B_0(1)\}$$

(dabei ist $\psi'(z)$ die Matrix einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung von $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\psi'(z)\cdot w$ ein Matrix-Vektor-Produkt $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit Ergebnis in $\mathbb{C}$), so folgt

$$L(\gamma) \leq M\int_a^b dt = M(b-a) = M\cdot L(\rho)\,.$$

Das Maximum existiert, da $|\psi'(z)\cdot w|$ stetig auf $Q\times\partial B_0(1)$ (=kompakt) ist.

Analog für die anderen drei Kanten von Q. Addieren wir schließlich diese vier Ungleichungen auf, so erhalten wir genau die Behauptung nach Aufgabe 6.10(a). ■

Satz 7.3 (***Causchyscher Integralsatz***)

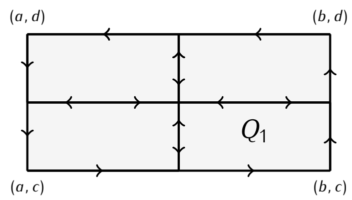
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D, $Q = [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $\psi : Q \longrightarrow D$ stetig differenzierbar und $\gamma := \psi(\partial Q)$ das Bild des Randes von Q unter ψ. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

Beweis: Wir unterteilen das Rechteck Q durch horizontales und vertikales Halbieren in vier gleich große Rechtecke Q_A, Q_B, Q_C, Q_D. Wegen Aufgabe 6.10 gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\psi(\partial Q_A)} f(z)dz + \int_{\psi(\partial Q_B)} f(z)dz + \int_{\psi(\partial Q_C)} f(z)dz + \int_{\psi(\partial Q_D)} f(z)dz\,,$$

da sich die zusätzlichen Kurvenintegrale aus $\psi(\partial Q_A) \oplus \psi(\partial Q_B) \oplus \psi(\partial Q_C) \oplus \psi(\partial Q_D)$ wegheben. Wähle $Q_1 \in \{Q_A, Q_B, Q_C, Q_D\}$ eines der vier Rechtecke, für das $\left|\int_{\psi(\partial Q_1)} f(z)dz\right|$ maximal ist.

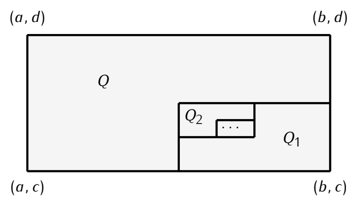


Es folgt

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq 4 \cdot \left|\int_{\psi(\partial Q_1)} f(z)dz\right|$$

Wir wenden das obige Argument induktiv auf Q_1 an und erhalten damit eine absteigende Kette von Rechtecken $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$ mit

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq 4^n \cdot \left|\int_{\psi(\partial Q_n)} f(z)dz\right| \qquad \forall\, n \geq 1. \qquad (*)$$



$$Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$$

Offensichtlich ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ einelementig; setze $z_0 := \psi(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n) \in \psi(Q)$. Nach Voraussetzung ist f in z_0 komplex differenzierbar. Dies bedeutet, dass wir $f(z)$ durch

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0$$

ersetzen können (lineare Approximation in z_0). Dabei hat die stetige Funktion $g(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$ die Stammfunktion $z \cdot f(z_0) + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$, so dass nach Bemerkung 6.7 $\int_\mu g(z)dz = 0$ für jeden

geschlossenen Weg μ in D.
Aus $(*)$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} (g(z) + r(z))\, dz \right| \\
&= 4^n \left| 0 + \int_{\psi(\partial Q_n)} r(z) dz \right| \\
&\overset{\text{Bem 7.1}}{\leq} 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |r(z)| \\
&\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |z - z_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right|
\end{aligned}$$

Da $z, z_0 \in \psi(Q_n)$ sind, gilt $|z - z_0| < L(\psi(\partial Q_n))$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z) dz &\leq 4^n L(\psi(\partial Q_n))^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right| \\
&\overset{\text{Lem 7.2}}{\leq} 4^n \cdot M^2 \cdot L(\partial Q_n)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right| \\
&= 4^n \cdot M^2 \cdot (\frac{1}{2^n} L(\partial Q))^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right| = M^2 \cdot L(\partial Q)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right|,
\end{aligned}$$

wobei M die Konstante von Lemma 7.2 ist. Nun ist $M^2 \cdot L(\partial Q)^2$ unabhängig von n und das Maximum $\max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{|z - z_0|} \right|$ konvergiert gegen Null für $z \to z_0$, also für $n \to \infty$. Dies liefert $\int_\gamma f(z) dz < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, also

$$\int_\gamma f(z) dz = 0\,,$$

wie behauptet. ∎

Folgerung 7.4

Der Causchysche Integralsatz gilt auch für Wege, die stetig differenzierbare Bilder von Kreisen oder Polyedern sind.

Beweis: Übung. Siehe Aufgabe 4, Blatt 3. ∎

Kapitel 3: Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

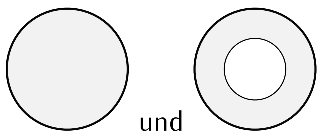
Wir betrachten nun die folgende Frage: Woher „weiss der Weg γ“, dass/ob die betrachtete Funktion im Inneren holomorph ist? Dafür brauchen wir einen wichtigen topologischen Begriff: den Begriff der „einfach zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C}$“.

8 Einfach zusammenhängende Gebiete

Die Teilmengen

$$\mathbb{C} \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

oder



unterscheiden sich durch die folgende Tatsache: Wege um das „Loch“ können nicht „stetig zusammengezogen werden“. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 8.1 (*Homotopie*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow D$ zwei Wege in D mit gleichem Anfangspunkt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) =: w$ und gleichem Endpunkt $\gamma_0(b) = \gamma_0(b) =: z$.

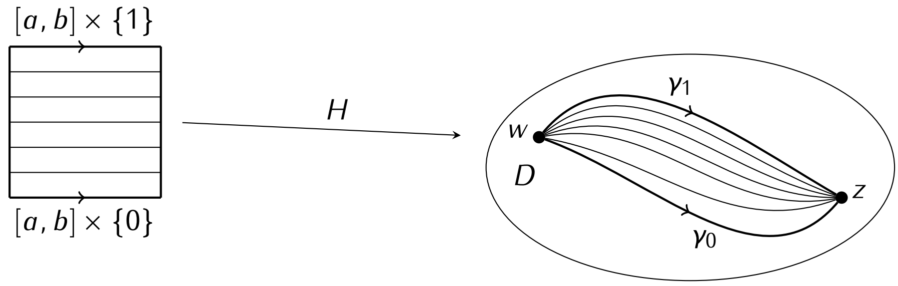
(a) Gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow D$ mit

$$H(t,0) = \gamma_0(t), H(t,1) = \gamma_1(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$$

und

$$H(a,s) = w, H(b,s) = z \quad \forall\, s \in [0,1]\,,$$

so heißen γ_0 und γ_1 **homotop** (in D). Dabei heißt H eine **Homotopie** von γ_0 nach γ_1. (Also: „γ_0 lässt sich innerhalb D stetig nach γ_1 deformieren, bei Festhalten von Anfangs- und Endpunkt.)



(b) Ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow D$ heißt **nullhomotop** in D, falls er homotop zum konstanten Weg $\gamma_\bullet : [a,b] \longrightarrow D$, $t \mapsto \gamma_\bullet(t) := \gamma(a)$ ist.

In der Praxis ist die sogenannte „Homotopieinvarianz des Wegintegrals“ eine extrem nützliche Variante des Cauchyschen Integralsatzes:

Bemerkung 8.2 (*Homotopieinvarianz des Wegintegrals*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow D$ zwei Wege in D mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt.

(a) Sind γ_0 und γ_1 homotop, so gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz\,.$$

(b) Ist γ_0 geschlossen und nullhomotop in D, so gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0\,.$$

Beweis:

(a) Die Behauptung folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz 7.3 für stetig differenzierbare Bilder von Rechtecken, angewandt auf die Homotopie H (also $\psi := H$ in Satz 7.3). Die vertikalen Rechteckseiten werden jeweils unter H auf einen Punkt abgebildet. Damit verschwindet ihr Gesamtbeitrag zum Wegintegral entlang des Bildes des Rechteckes unter H. Daher ist

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0\,.$$

(b) Wende Teil (a) an mit $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow D$, $t \mapsto \gamma_0(a)$ (konst. Weg an $\gamma_0(a)$). Damit folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_0(a))\underbrace{\gamma_1'(t)}_{=0}\,dt = 0\,.$$

■

Beispiel 12

Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei γ_0 die Kreislinie um 0 vom Radius 1 und γ_1 eine weitere Kreislinie durch 1, die 0 im Inneren hat. Dann sind γ_0 und γ_1 homotop in D und es gilt:

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz \,.$$

Nach Bemerkung 8.2(b) sind γ_0 und γ_1 nicht nullhomotop, da

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 \,.$$

(Nach Beispiel 10(b).)
Ist nun γ_1 irgendein Weg, der „genau einmal" gegen den Uhrzeigersinn (positiv) um 0 läuft, so sind γ_0 und γ_1 homotop.

Inspiriert durch Bemerkung 8.2(b) definieren wir:

Definition 8.3 (*einfach zusammenhängend*)

Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls D wegzusammenhängend ist, und jeder geschlossene Weg in D nullhomotop (in D) ist.

Beispiel 13

(a) $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend. Klar: $\mathbb{C}$ ist wegzusammenhängend. Sei nun $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Zu zeigen: γ ist nullhomotop. Wähle

$$H : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, (t, s) \mapsto (1 - s)\gamma(t) + s\gamma(a) \,.$$

Dies ist offensichtlich eine Homotopie von γ_0 zu dem konstanten Weg $\gamma_\bullet(a)$.

(b) Die offene Kreisscheibe $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist einfach zusammenhängend. (Wie (a).)

(c) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend, aber <u>nicht</u> einfach zusammenhängend. Siehe Beispiel 12.

Bemerkung 8.4

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten:

(a) Ist D wegzusammenhängend und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.

(b) Ist D einfach zusammenhängend, so hängen Wegintegrale über f nur von Anfangs- und Endpunkt ab; insbesondere ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossnen Weg γ in D.

Beweis:

(a) Seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig. Da D wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg γ in D mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Nach Bemerkung 6.7 ist

$$\int_\gamma f(z)dz = f(z_2) - f(z_1)$$

Aber nach Voraussetzung ist $f'(z) = 0$ und somit ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Es folgt $f(z_2) = f(z_1)$ und damit ist f konstant auf D, wie behauptet.

(b) Seien γ_1 und γ_2 zwei Wege in D mit gleichem Anfangs-/Endpunkt. Weiter sei $\tilde{\gamma} := \gamma_1 \oplus \gamma_2^-$ (der Weg, der zuerst γ_1, dann γ_2 entgegengesetzt durchläuft). Damit ist $\tilde{\gamma}$ geschlossen und nach Voraussetzung nullhomotop in D. Dann gilt

$$0 \overset{\text{Bem. 8.2(b)}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz \overset{\text{Auf. 6.10}}{=} \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz\,,$$

wie behauptet. ■

Folgerung 8.5

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G.

Beweis: Nach Bemerkung 8.4(b) verschwinden Wegintegrale über geschlossene Wege in G. Damit folgt aus Satz 6.11, dass f eine Stammfunktion auf G besitzt. ■

9 Die Cauchysche Integralformel

Wir können nun einige Eigenschaften holomorpher Funktionen beweisen, die direkt aus dem Cauchyschen Integralsatz folgen, und einen deutlichen Unterschied zur reellen Analysis zeigen.

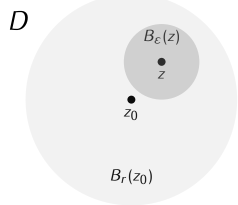
Satz 9.1 (*Cauchysche Integralformel*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $B := B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe um $z_0 \in D$ vom Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$, die mitsamt ihres Randes ∂B in D liegt. Dann gilt für jedes $z \in B$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z} dw\,.$$

Insbesondere ist die holomorphe Funktion f im Inneren der Kreisscheibe $B_r(z_0)$ durch die Werte auf dem Rand bereits festgelegt.

Beweis: Sei $z \in B$ fest. Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (Bemerkung 8.4(a)) können wir den Integrationsweg ∂B durch eine Kreislinie γ um z mit Radius $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ersetzen, wobei $B_\varepsilon(z) \subset B_r(z_0)$ ist. (Dies ist möglich, da der Integrand auf $D \setminus \{z\}$ stetig ist.)



Somit gilt:

$$\int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z} dw\,.$$

Im zweiten Term machen wir die Substitution $u := w - z$, so gilt:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{w - z} dw = f(z) \int_{|u|=\varepsilon} \frac{1}{u} du = f(z) \cdot 2\pi i$$

nach Beispiel 10(b). Also bleibt zu zeigen, dass der erste Term $\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw$ Null ist. Sein Integrand ist holomorph auf $D \setminus \{z\}$ und die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z) & \text{w=z} \end{cases}$$

ist stetig auf D, d.h. der Integrand ist in z stetig fortsetzbar durch $f'(z)$. Somit hat die Funktion $\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right|$ auf der kompakten Menge $\overline{B_r(z_0)}$ ein Maximum M und wir erhalten nach Lemma 7.1 die Abschätzung

$$\left| \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dz \right| \leq L(\gamma) \cdot M = 2\pi\varepsilon \cdot M \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0\,,$$

Es folgt: $\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = 0$. ■

Anmerkung 9.2

Beachte: Die Voraussetzung der Holomorphie von f im Inneren von B ist notwendig, obwohl die Formel nur die Werte am Rand verwendet. Denn für $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$, $B = B_1(0)$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{w(w-z)} dw \qquad \text{(rechte Seite der CIF)}$$

beschränkt, aber $|f(z)| = \frac{1}{|z|} \longrightarrow \infty$ für $z \to 0$. Also kann i.A. die Gleichheit

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{w(w-z)} dw$$

nicht gelten.

Beispiel 14

(a) **Anwendung der Cauchysche Integralformel zur Integralberechnung**:

$$I := \int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+1} dw$$

interpretieren wir als Teil der rechten Seite der Cauchysche Integralformel, also $f(w) = e^w$, $z = -1$ und $B_r(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 2\}$ (also $z_0 = 0$, $r = 2$). Nun folgt aus Satz 9.1:

$$I = 2\pi i \cdot f(z) = 2\pi i \cdot f(-1) = \frac{2\pi i}{e}$$

Beachte: Insbesondere benötigen wir dafür keine Stammfunktion!

(b) Im Kontext von Satz 9.1: Ist f holomorph auf D und konstant auf dem Rand $\partial B_r(z_0)$, so ist f konstant auf dem Abschluß $\overline{B_r(z_0)}$.
(Denn die konstante Funktion ist eine holomorphe Funktion mit den „richtigen“ Werten auf dem Rand, also kann es nach der CIF keine weitere geben).

10 Mittelwertsatz, Maximums- und Minimumsprinzip

Ist B die im Satz 9.1 angegebene Kreisscheibe um $z_0 \in D$ und $z = z_0$ das Zentrum, so vereinfacht sich die Cauchysche Integralformel weiter:

Folgerung 10.1 (*Mittelwertsatz*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $B := B_r(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_0| < r\} \subseteq D$ eine Kreisscheibe um $z_0 \in D$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \,,$$

d.h. der Funktionswert am Mittelpunkt z_0 von B ist Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand ∂B.

Beweis: Die CIF liefert:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw \,.$$

Parametrisieren wir die Kreislinie ∂B mit dem Weg

$$[0, 2\pi] \longrightarrow D, t \mapsto z_0 + re^{it} \,,$$

so wird nach Definition:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} \cdot ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \,.$$

■

Satz 10.2 (*Maximumsprinzip*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist z_0 ein Punkt in D, an dem $|f|$ ein lokales Maximum hat (also $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ für alle z in einer Umgebung von z_0 in D), so ist f auf einer Umgebung von z_0 konstant.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die Funktion $|f|$ eingeschränkt auf $B := B_r(z_0) \subseteq D$ ihr globales Maximum in z_0 annimmt. Nach dem Mittelwertsatz 10.1 für alle $0 < s < r$ gilt:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + se^{it}) \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0) \right| dt = |f(z_0)|$$

Damit gilt Gleichheit überall. Wegen der Stetigkeit von $|f|$ folgt, dass $\left| f(z_0 + se^{it}) \right| = |f(z_0)|$ für alle $0 < s < r$, alle $t \in [0, 2\pi]$. Also ist $|f|$ konstant auf B.
Wir behaupten nun, dass f auf B konstant ist. Schreibe $f = u + iv$ mit $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$. Dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(z)|^2 = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = c \text{ (konstant) } \forall\, z = x + iy \in B.$$

Ist $c = 0$, so ist $u|_B = v|_B = 0$ und somit ist $f|_B = 0$ konstant. Also können wir annehmen, dass $c \neq 0$ ist. Dann gilt auf B :

$$0 = \frac{\partial |f|^2}{\partial x} = 2uu_x + 2vv_x \quad \text{und} \quad 0 = \frac{\partial |f|^2}{\partial y} = 2uu_y + 2vv_y \,.$$

Außerdem gilt nach den CRD (4.5):

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x \,,$$

Insgesamt erhalten wir die Matrixgleichungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0\,.$$

Da $-\det(A) = \det(B) = u^2 + v^2 \neq 0$ ist, sind A und B invertierbar und damit sind

$$\left(\begin{smallmatrix} u_x \\ u_y \end{smallmatrix}\right) = I_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_x \\ u_y \end{smallmatrix}\right) = A^{-1}A \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_x \\ u_y \end{smallmatrix}\right) = A^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right) = I_2 \cdot \left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right) = B^{-1}B \cdot \left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right) = B^{-1} \cdot 0 = 0\,.$$

Daraus folgt: $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ (auf B), so dass u und v konstant auf B sind. Somit ist f konstant auf B, wie verlangt. ■

Analog gilt:

Satz 10.3 (*Minimumsprinzip*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat $|f|$ in $z_0 \in D$ ein lokales Minimum, das ungleich Null ist, so ist f auf einer Umgebung von z_0 konstant.

Beweis: Wende das Maximumsprinzip auf die Funktion $\frac{1}{f}$ an. ■

Aufgabe 10.4 (*Aufgabe 4, Blatt 4*)

(a) [**Maximumsprinzip, 2. Version**] Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt. Weiter sei $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf D. Zeigen Sie: das Betragsmaximum von f auf $\overline{D}$ wird auf dem Rand $\partial D = \overline{D} \setminus D$ angenommen.

(b) [**Fundamentalsatz der Algebra**] Zeigen Sie: Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
(Hint: Nehme an, dass f keine Nullstelle besitzt, betrachte die Funktion $\frac{1}{f}$ und wende (a) an.)

Kapitel 4: Potenzreihen

In der Funktionentheorie lassen sich holomorphe Funktionen immer lokal in Potenzreihen entwickeln! Wir untersuchen nun diese Idee.

11 Konvergenzradius

Definition 11.1 (*Potenzreihe, Konvergenzradius*)

Eine **Potenzreihe um** $z_0 \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,,$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Die Zahl

$$r := \sup\{|z - z_0| \ \mid f \text{ konvergiert in } z_0\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe f.

Zwei Eigenschaften der Konvergenz von Potenzreihen, die aus der GDM-Vorlesung bekannt sind, sind:

Bemerkung 11.2 (*Konvergenz von Potenzreihen*)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) Konvergiert die Potenzreihe f für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ absolut. Insdesondere gilt:

- Ist $|z - z_0| < r$, so konvergiert $f(z)$ absolut; und
- ist $|z - z_0| > r$, so divergiert $f(z)$.

(b) Auf jeder kompakten Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r_1\}$ mit $r_1 < r$ konvergiert $f(z)$ sogar gleichmäßig.

Beweis: Ohne Beweis. Siehe GDM. ■

Beachte: Für Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises, also $|z - z_0| = r$, kann die betrachtete Reihe sowohl konvergieren als auch divergieren.

Bemerkung 11.3

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat f den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

falls dieser Grenzwert existiert (d.h. in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

Beweis: Existiert der Grenzwert der Aussage, so liefert das Quotientenkriterium (Bemerkung 2.6):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n} \right| = \frac{|z-z_0|}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|z-z_0|}{r}$$

und die Reihe konvergiert für $|z-z_0| < r$, und divergiert für $|z-z_0| > r$. ■

Beispiel 15

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$ nach Lemma 3.1.

Um Potenzreihen mit holomorphen Funktionen zu verbinden, betrachten wir jetzt die folgende Frage: Sind Potenzreihen holomorph? Falls ja: was ist die Ableitung?

Lemma 11.4

Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hat denselben Konvergenzradius wie die daraus durch gliedweises Differenzieren gebildete Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, dass der Konvergenzradius von g durch den von f nach unten beschränkt ist. Sei also z' im Konvergenzkreis von f. Dann zeigen wir, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < |z'-z_0|$ die Potenzreihe g absolut konvergiert. Wir können annehmen, dass $z' \neq z_0$ ist. Nun ist

$$|g(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |na_n(z-z_0)^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z'-z_0)^n| \cdot n \cdot \left| \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(z'-z_0)^{n-1}} \right| \cdot \frac{1}{|z'-z_0|} .$$

Da z' im Konvergenzkreis von f ist, ist $|a_n(z'-z_0)^n|$ beschränkt, etwa durch $M \in \mathbb{R}$. Mit $q := \left|\frac{z-z_0}{z'-z_0}\right| < 1$ wird

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z-z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} .$$

Nach Bemerkung 11.3 hat $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ den Konvergenzradius $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Da $q < 1$ ist, ist z im Konvergenzkreis von g und die Behauptung gilt.
Eine analoge Argumentation mit f und g vertauscht zeigt die andere Ungleichung. ■

Satz 11.5

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D, die Punktweise gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiere. Sind die Ableitungen $f_n' : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und konvergieren gleichmäßig auf D, so ist die Grenzfunktion f holomorph auf D, und $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Beweis: Schreibe, wie üblich, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $f = u + iv$, $f_n = u_n + iv_n$ (Realteil und Imaginärteil).

· Da u reell ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Da die Folge $(\frac{\partial u_n}{\partial x})$ nach Voraussetzung auf D gleichmäßig konvergiert, ist ihre Grenzfunktion $\frac{\partial u}{\partial x}$ stetig auf D. Ebenso für $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$.
Daraus folgt, dass $f = u + iv$ reell differenzierbar auf D ist.

· Da die Funktionen f_n holomorph auf D sind, erfüllen sie die CRD: $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y} = -\frac{\partial v_n}{\partial x}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

somit erfüllt auch f die CRD.

Damit ist f holomorph auf D nach Satz 4.5, und es gilt

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{n\to\infty}(\frac{\partial u_n}{\partial x} + i\frac{\partial v_n}{\partial x}) = \lim_{n\to\infty} f_n'\,.$$

■

Folgerung 11.6

Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist auf ihrem Konvergenzkreis holomorph mit Ableitung $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$.

Beweis: Nach Lemma 11.4 haben die Potenzreihen $f(z)$ und $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius r.
Nach Bemerkung 11.2(b) konvergieren beide Potenzreihen sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $\overline{B_{r'}(z_0)}$ mit $r' < r$ und somit auf jeder offenen Kreisscheibe $B_{r'}(z_0)$ für alle $r' < r$. Wende nun Satz 11.5 auf die Partialsummen von f und g: dies liefert die Behauptung für $B_{r'}(z_0)$. Schließlich lassen wir $r' \longrightarrow r$ streben und die Aussage gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$, wie behauptet. ■

12 Taylorreihen

Wir können nun holomorphe Funktionen als Potenzreihen entwickeln.

Folgerung 12.1 (*Taylorformel für Potenzreihen*)

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f auf ihrem Konvergenzkreis $B_r(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar. Weiter können alle komplexen Ableitungen $f^{(n)}$ gliedweise berechnet werden und

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,.$$

Insbesondere gilt für alle $z \in B_r(z_0)$ die Taylorformel.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\,.$$

Beweis: Durch Induktion erhält man mit Folgerung 11.6, dass jede höhere komplexe Ableitung $f^{(n)}$ von f als Potenzreihe mit Konvergenzradius r existiert, und durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe $f^{(n-1)}$ berechnet werden kann. Daraus folgt, dass

$$f^{(n)}(z) = \sum_{\ell=n}^{\infty} \ell \cdot (\ell-1) \cdots (\ell-n+1) a_\ell (z-z_0)^{\ell-n}$$

ist, und für $z = z_0$ erhalten wir: $f^{(n)}(z_0) = n! \cdot a_n$, also $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. ■

Satz 12.2 (*Taylorformel für holomorphe Funktionen*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D. Seien $z_0 \in D$ beliebig und $B := B_r(z_0) \subseteq D$ eine Kreisscheibe mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\overline{B} \subseteq D$. Dann gelten:

(a) f lässt sich in B in eine Potenzreihe um z_0 mit Konvergenradius mindestens r entwickeln. Genauer gilt für alle $z \in B$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n .$$

Diese Reihe heißt **Taylor-Reihe** von f.

(b) Die höheren komplexen Ableitungen von f in z_0 erfüllen die **verallgemeinerte Cauchysche Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für alle $n \geq 0$ und für alle $r' < r$.

Beweis: Sei $z \in B$ und $0 < r' < r$ mit $z \in B_{r'}(z_0)$. Nach der Cauchyschen Integralformel (Satz 9.1) gilt:

$$f(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} dw$$

Da $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r'} < 1$ für alle $w \in \partial B_{r'}(z_0)$, dürfen wir den zweiten Faktor des Integranden durch seine geometrische Reihenentwicklung ersetzen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw .$$

Hier ist $\frac{f(w)}{w-z_0}$ beschränkt auf $\partial B_{r'}(z_0)$ und $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$, so dass die Reihe gleichmäßig konvergent auf $\partial B_{r'}(z_0)$ ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir Summe und Integral vertauschen (GDM) und erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right)}_{=:a_n} (z-z_0)^n .$$

Dies ist eine Potenzreihe um z_0. Nach Folgerung 12.1 ist zudem $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. ■

Folgerung 12.3 (*Satz von Goursat*)

Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.

Beweis: Dies folgt aus Satz 12.2(a) zusammen mit Folgerung 12.1. ■

Beispiel 16

Wir entwickeln die Funktion $f : D := \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ um $z_0 := 1$.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$ konvergiert also auf $B_{\sqrt{2}}(1) \subseteq D$ gegen f (nach Satz 12.2), so dass der Konvergenzradius $\geq \sqrt{2}$ ist.
Wäre der Konvergenzradius $> \sqrt{2}$, so wäre die Reihe noch in i konvergent, und dort gleich f. Widerspruch, da $\lim_{z\to i} |f(z)| = \infty$. Also ist der Konvergenzradius $= \sqrt{2}$.

Definition 12.4

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D. Ein Punkt $z \in \partial D$ heißt **Singularität** von f, falls f nicht holomorph nach z fortgesetzt werden kann.

Folgerung 12.5

Jede Potenzreihe hat eine Singularität auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Beweis: Sei r der Konvergenzkreis der Potenzreihe f um $z_0 \in \mathbb{C}$. Kann f auf jeden Punkt des Randes holomorph fortgesetzt werden, so definiert es eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe vom Radius $r + \varepsilon$ um z_0 mit $\varepsilon > 0$, und f ist auf $B_{r+\varepsilon}(z_0)$ nach Satz 12.2 als Potenzreihe darstellbar. Aber dann ist der Konvergenzradius $> r$. Widerspruch! ■

13 Der Satz von Liouville

Zunächst schätzen wir Taylorkoeffizienten holomorpher Funktionen ab:

Lemma 13.1

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in D$ mit $B_r(z_0) \subseteq D$ ($r \in \mathbb{R}_{>0}$). Dann gilt

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:

$$|f^{(n)}(z_0)| \overset{\text{Satz 12.2}}{=} \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \overset{\text{Bem 7.1}}{\leq} \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} = \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$ ■

Satz 13.2 (*Satz von Liouville*)

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis: Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte ganze Funktion. Nach Satz 12.2 lässt sich die Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ durch ihre Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ darstellen. Da f beschränkt ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 13.1 gilt

$$|f^n(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M \qquad \forall n \geq 1, \forall r > 0.$$

Mit $r \to \infty$ erhalten wir $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \geq 1$. Somit ist f konstant. ■

Als Folgerung erhalten wir einen zweiten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. (Vergleiche mit Aufgabe 4, Blatt 4.)

Folgerung 13.3 (*Fundamentalsatz der Algebra*)

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
(Mit anderen Worten: Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen; oder jedes nicht-konstante Polynom zerfällt in Linearfaktoren.)

Beweis: Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein nicht-konstantes Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$, und schreibe $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $n \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist $g := \frac{1}{f}$ eine ganze Funktion. Für $|z| = r$ ist

$$|f(z)| \geq |a_n|r^n - |a_{n-1}|r^{n-1} - \ldots - |a_0| \xrightarrow{r\to\infty} \infty\,,$$

da $n \geq 1$ ist. Damit ist g beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist g konstant, also auch f konstant, d.h. vom Grad Null. Das ist ein Widerspruch! ■

14 Der Identitätssatz

Bemerkung 14.1

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \geq 0$, für ein $z_0 \in G$, so ist $f \equiv 0$ konstant auf G.

Beweis: Sei $z_1 \in G$ beliebig und $\gamma : [0,1] \longrightarrow G$ ein Weg von z_0 nach z_1 (existiert, da G ein Gebiet ist). Betrachte die Menge

$$I := \{t \in [0,1] \mid f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \quad \forall\, n \geq 0\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist $I \neq \emptyset$, da $0 \in I$ ist. Außerdem ist I abgeschlossen, da durch Gleichheit stetiger Funktionen definiert. Insbesondere: $t_0 := \max I$ existiert.

- Falls $t_0 = 1$ ist, gilt $0 = f^{(n)}(\gamma(1)) = f^{(n)}(z_1)\ \forall\, n \geq 0$. Insbesondere ist $f(z_1) = 0$.
- Falls $t_0 < 1$ ist, entwickle f in Potenzreihe um t_0. Satz 12.2 impliziert, dass f in einer Umgebung $B_r(\gamma(t_0))$ verschwindet, insbesondere existiert ein $t_1 \in I$ mit $t_1 > t_0$. Widerspruch zur Definition von t_0. Damit ist $t_0 < 1$ unmöglich.

Daraus folgt, dass $f \equiv 0$ konstant auf G sein muss. ■

Lemma 14.2

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann besitzen die Nullstellen von f keinen Häufungspunkt in G. (D.h. die Menge $Z(f)$ der Nullstellen von f ist diskret.)

Beweis: Wir nehmen an, dass $Z(f)$ einen Häufungspunkt $z_0 \in G$ besitzt. Dann existiert eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\geq 0} \subseteq Z(f)$ mit $z_n \to z_0$, $z_n \neq z_0$. Entwickle f in ihre Taylor-Reihe um z_0 (Satz 12.2):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

für alle z aus einer offenen nichtleeren Kreisscheibe $B_r(z_0) \subseteq G$. Sei m minimal mit $a_m \neq 0$, so dass

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots = (z-z_0)^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}(z-z_0)^i .$$

Da $z_n \to z_0$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in B_r(z_0)$ und $0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}(z_n - z_0)^i$ für alle $n \geq N$. Es folgt:

$$0 = a_m + (z_n - z_0) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+m}(z_n - z_0)^{i-1}}_{\text{hlomorph, also beschränkt}}$$

und aus $z_n - z_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ folgt, dass $a_m = 0$. Wiederspruch zur Definition von a_m. Also $a_m = 0$ für alle $m \geq 0$ und damit ist $f^{(m)}(z_0) = 0$ $m \geq 0$. Aber nach Bemerkung 14.1 ist $f \equiv 0$ konstant auf G. Widerspruch! ■

Satz 14.3 (*Identitätssatz*)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sind $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $f|_A = g|_A$ für eine Teilmenge $A \subseteq G$, die einen Häufungspunkt in G besitzt, so gilt $f = g$ auf ganz G.

Beweis: Wende Lemma 14.2 auf $h := f - g$ an. ■

Unsere letzte direkte Konsequenz aus der Integralformel charakerisiert die topologischen Eigenschaften von holomorphen Funktionen:

Satz 14.4 (*Gebietstreue*)

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann ist auch $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Beweis: Da f stetig ist, ist das Bild der wegzusammenhängenden Menge G wieder wegzusammenhängend.
Zu zeigen bleibt nun, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist.
Sei dazu $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $w_0 = f(z_0)$. Nach Lemma 14.2 existiert $\varepsilon > 0$ mit: $z \mapsto f(z) - w_0$ hat keine Nullstelle in $K := \overline{B_\varepsilon(z_0)}$ außer z_0. Setze

$$m := \min_{z \in \partial K} |f(z) - w_0| > 0 \qquad \text{(existiert, da } \partial K \text{ kompakt ist).}$$

Behauptung: $K' := B_{\frac{m}{2}}(w_0) \subseteq f(G)$ (offene Umgebung von w_0 in $f(G)$).
Beweis: Seien $w \in K'$ und $g := f - w$. Für $|z - z_0| = \varepsilon$ gilt

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| + |w_0 - w| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} ;$$

für $z = z_0$ ist $|g(z)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{m}{2}$. Insbesondere ist die holomorphe Funktion g im Mittelpunkt z_0 von K betragsmäßig kleiner als auf dem gesamten Rand ∂K. Nach dem Minimumsprinzip hat g eine Nullstelle in K. Somit existiert $z \in K$ mit $w = f(z) \in f(K) \subseteq f(G)$, wie behauptet.

Aus der Behauptung folgt, dass $f(G)$ offen ist. ■

Kapitel 5: Residuentheorie

Nach dem letzten Kapitel verstehen wir holomorphe Funktionen auf Kreisscheiben: es sind einfach die konvergenten Potenzreihen. Der nächst kompliziertere Fall sind *Kreisringe*, d.h. Mengen der Form

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r < R$. (Auch die Fälle $r = 0$ oder $R = \infty$ wollen wir erlauben.) Dafür entwickeln wir holomorphe Funktionen in sogenannten Laurent-Reihen. Die Laurent-Reihenentwicklung ist unser erster Schritt zum Residuenkalkül.

15 Laurent-Reihen

Zunächst untersuchen wir Reihenentwicklungen, in denen auch negative Potenzen von $(z-z_0)$ auftreten können.

Definition 15.1 (*Laurent-Reihe*)

Eine **Laurent-Reihe** um $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine formale Summe der Form

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n}_{=: f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{=: f^+(z)} \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei $f^-(z)$ der **Hauptteil** und $f^+(z)$ der **Nebenteil** von f heißen.

Beachte: Der Hauptteil f^- läßt sich auch schreiben als Potenzreihe

$$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n ,$$

und diese hat einen Konvergenzradius, den wir als $\frac{1}{r}$ ($r \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$) schreiben.

Bemerkung 15.2

Seien $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Laurent-Reihe, und $\frac{1}{r}$ bzw. R die Konvergenzradien von f^- bzw. f^+. Dann konvergiert $f(z)$ (absolut) für alle z im Kreisring $A_{r,R}(z_0)$, und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit

$|z-z_0| < r$ oder $|z-z_0| > R$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $A_{r,R}(z_0)$.

Beweis: Nach Definition konvergiert f^+ für $|z-z_0| < R$ absolut, und f^- für $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r}$, also $|z-z_0| > r$. Die Divergenz und die gleichmäßige Konvergenz folgen aus Bemerkung 11.2. ■

Beispiel 17

(a) Besteht f^- nur aus endlich vielen Termen, so ist $r = \infty$, also $\frac{1}{r} = 0$, und f konvergiert auf der **punktierten Kreisscheibe** $A_{0,R}(z_0)$.
Analog: hat f^+ Konvergenzradius $R = \infty$, so konvergiert f auf dem Komplement $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$ der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)}$.

(b) Sei $f(z) := \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
In diesem Fall: $f^- = \frac{1}{z}$ konvergiert für $z \neq 0$, und $f^+ = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für $|z| < 1$.
Somit konvergiert f auf dem Kreisring $A_{0,1}(0)$, und ergibt dort die holomorphe Funktion

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)}\,.$$

(c) Sei $f(z) := -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$.
In diesem Fall: f^- konvergiert für $|z| > 1$, und f^+ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit konvergiert f auf $A_{1,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, und definiert dort die holomorphe Funktion

$$-\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}\,.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion wie in (b), aber in zwei disjunkten Kreisringen.

Satz 15.3 (*Laurent-Entwicklung holomorpher Funktionen*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf D. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig und $0 \leq r < R$ reelle Zahlen mit $A_{r,R}(z_0) \subseteq D$. Dann gelten:

(a) f läßt sich auf $A_{r,R}(z_0)$ in eine Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ entwickeln; und

(b) die Koeffizienten a_n der Laurent-Reihe sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für ein beliebiges $r < \rho < R$. Insbesondere sind die Koeffizienten a_n eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $z \in A_{r,R}(z_0)$ beliebig. Die CIF (Satz 9.1) liefert:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für eine positiv orientierte Kreislinie $\gamma = \partial B_\rho(z)$ mit $r < \rho < R$. Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals können wir γ durch zwei verbundene Kreislinien mit Radien $r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R$

ersetzen und wir erhalten (mit Hilfe der Aufgabe 6.10)

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}dw}_{:=A^-} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}dw}_{:=A^+} .$$

Den Summanden A^+ behandeln wir genauso wie im Beweis der Taylor-Entwicklung (Satz 12.2) und erhalten

$$A^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \right) (z-z_0)^n .$$

Den Summanden A^- behandeln wir analog mit dem Unterschied, dass nun $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$ ist und schreiben

$$A^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}dw .$$

Nach analoger Argumentation wie im Beweis der Taylor-Entwicklung erhalten wir

$$A^- = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \right) (z-z_0)^n ,$$

wie verlangt.

Eindeutigkeit der Koeffizienten: Sei $f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine beliebige Laurent-Entwicklung, und $r < \rho < R$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1}dz \\
&\overset{w\,:=\,z-z_0}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{|w|=\rho} w^{k-n-1}dw}_{=0 \text{ für } k-n-1\neq -1} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

nach Beispiel 11(b), da $\int_{|w|=\rho} w^{-1}dw = 2\pi i$ ist. ■

Anmerkung 15.4

Ist f sogar auf der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ holomorph, so ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 0 \quad \text{für } n < 0 ,$$

da der Integrand holomorph ist (nach Bemerkung 8.4), und wir erhalten die Taylor-Entwicklung aus Satz 12.2.

16 Isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt betrachten wir stets: $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ mit $A_{0,R}(z_0) \subseteq D$ für ein $R > 0$. Nach Satz 15.3 läßt sich f auf dem Kreisring $A_{0,R}(z_0)$ in eine Laurent-Reihe

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten a_n eindeutig bestimmt sind.

Definition 16.1 (*Isolierte Singularität, hebbare Singularität, Ordnung*)

(a) · Der Punkt z_0 heißt **isolierte Singularität** von f.

· Läßt sich f zu einer holomorphen Funktion auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzen, so heißt z_0 **hebbare Singularität** von f (falls es also eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass $\widetilde{f}|_D = f$).

(b) Wir nennen

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) := \begin{cases} +\infty & \text{falls } a_n = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{Z}\,, \\ \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \text{falls dieses existiert,} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

die **Ordnung** von f in z_0.

Insbesondere ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$, wenn $f \equiv 0$ auf einer geeigneten punktierten Umgebung von z_0 ist. Also nehmen wir bis zum Ende dieses Abschnitts an, dass $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \neq +\infty$ ist.

Bemerkung 16.2

Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f. Ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \neq \pm\infty$, so ist $\operatorname{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z) \text{ auf } D$$

für eine holomorphe Funktion $g : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ ist.

Beweis: · Ist $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$, so haben wir auf $A_{0,R}(z_0)$ die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n$$

mit $a_m \neq 0$, da $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ ist. Definiere die auf $D \cup \{z_0\}$ holomorphe Funktion

$$g : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n & \text{für } z \in B_R(z_0), \\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $g(z_0) = a_m \neq 0$ ist, ist g die gesuchte Funktion.

· Ist umgekehrt $g : D \cup \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$, so entwickle g in eine Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ um z_0. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} b_{n-m}(z - z_0)^n$$

die Laurent-Entwicklung von f um z_0 auf $A_{0,R}$ und $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = m$, da $b_{m-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0$ ist. ∎

Wir können nun die isolierten Singularitäten in drei Kategorien klassifizieren:

Definition 16.3

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von f und $m := \mathrm{ord}_{z_0}(f)$. Dann heißt z_0

- **Nullstelle von f der Ordnung** m, falls $m \in \mathbb{Z}_{>0}$;
- **Polstelle von f der Ordnung** $-m$, falls $m \in \mathbb{Z}_{<0}$;
- **wesentliche Singularität von** f, falls $m = -\infty$.

Beispiel 18

(a) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1}$ hat eine isolierte Singularität an $z_0 = 0$, die nicht hebbar ist, da $\lim_{z \to 0} |f(z)| = \infty$ ist und f dort nicht einmal stetig fortsetzbar ist. Außerdem ist $\mathrm{ord}_0(f) = -1$, so dass 0 eine Polstelle von f der Ordnung 1 ist.

(b) Die Funktion $f(z) = z^2$ hat eine isolierte Singularität an $z_0 = 0$, die hebbar ist. Außerdem ist $\mathrm{ord}_0(f) = 2$, so dass 0 eine Nullstelle der Ordnung 2 ist.

(c) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = z^{-2} \cdot (1 + z) = z^{-2} g(z)$ mit $g(z) = (1 + z)$ holomorph und $g(0) = 1 \neq 0$. Damit ist $\mathrm{ord}_0(f) = -2$ und $z_0 = 0$ eine Polstelle der Ordnung 2.

(d) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ für $z \neq 0$ hat eine isolierte Singularität an $z_0 = 0$ mit $\mathrm{ord}_0(f) = -\infty$, also eine wesentliche Singularität.

Wir untersuchen nun hebbare Singularitäten:

Anmerkung 16.4

Es gilt:
$$\begin{aligned} z_0 \text{ ist eine hebbare Singularität von } f &\overset{\text{Def.}}{\iff} f \text{ ist holomorph auf } D \cup \{z_0\} \\ &\overset{\text{Satz 12.2}}{\iff} f \text{ ist als Potenzreihe um } z_0 \text{ entwickelbar} \\ &\overset{\text{Def.}}{\iff} \mathrm{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,. \end{aligned}$$

Satz 16.5 (*Riemannscher Hebbarkeitssatz (B. Riemann, 1851)*)

Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann hebbar, wenn es eine punktierte Umgebung $A_{0,\varepsilon}(z_0) \subseteq D$ gibt, auf der f beschränkt ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Klar nach Definition.

„$\Leftarrow$“: Laut Voraussetzung existiert ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in A_{0,\varepsilon}(z_0)$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir können annehmen, dass $\varepsilon < R$ ist. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung von f um z_0 auf $A_{0,\varepsilon}(z_0)$. Mit Hilfe der Abschätzung in Bemerkung 7.1 erhalten wir

$$|a_n| \leq \frac{M}{\epsilon^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$ (siehe Beweis von Lemma 13.1 für ein analoges Argument). Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $a_n = 0$ für alle $n < 0$. Somit ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und z_0 eine hebbare Singularität. ∎

Jetzt betrachen wir wesentliche Singularitäten:

Satz 16.6 (*Casorati-Weierstraß; 1868, 1876*)

Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn für jede Umgebung U von z_0 mit $U \subseteq D$ die Teilmenge $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Angenommen $f(U \setminus \{z_0\})$ sei nicht dicht in $\mathbb{C}$, so existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $w \in \mathbb{C}$ mit

$$f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_\varepsilon(w) = \emptyset$$

und somit ist $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Die Funktion $g : U \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$ ist dann wohldefiniert und nach oben beschränkt durch $\frac{1}{\varepsilon}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz läßt sich g auf ganz $U \cup \{z_0\}$ holomorph fortsetzen. Somit hat

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

entweder eine hebbare Singularität in z_0 (falls $g(z_0) \neq 0$) oder eine Polstelle (falls $g(z_0) = 0$), dessen Ordnung gleich $\operatorname{ord}_{z_0}(g)$ ist; beides im Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Leftarrow$": Ist umgekehrt z_0 keine wesentliche Singularität, so ist z_0 entweder eine hebbare Singularität oder eine Pollstelle der Funktion f. Somit konvergiert $f(z)$ für $z \longrightarrow z_0$ stets gegen eine komplexe Zahl oder gegen ∞, so dass das Bild $f(U \setminus \{z_0\})$ für eine genügend kleine Umgebung U von z_0 nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. ■

17 Der Residuensatz

Unser Ziel ist es jetzt, eine allgemeine Integralformel $\int_\gamma f(z)dz$ für holomorphe Funktionen f mit *endlich vielen* isolierten Singularitäten zu beweisen. Diese soll alle bisherigen Integralformeln verallgemeinern, d.h.

- den Cauchyscher Integralsatz (Satz 7.3);
- die Cauchysche Integralformel (Satz 9.1); und
- die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel (Satz 12.2(b)).

Definition 17.1 (*Index/Umlaufzahl*)

Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann heißt

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

Index oder **Umlaufzahl** von γ um z_0.

Beachte: Nach Aufgabe 1, Blatt 6 ist

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = k \cdot 2\pi i$$

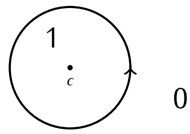
für ein $k \in \mathbb{Z}$, für ein beliebiges γ; und k zählt, wie oft γ im positiven Sinn um z_0 herumläuft. Somit ist $\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma)$ eine ganze Zahl in $\mathbb{Z}$.

Beispiel 19

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto c + re^{it}$ mit $c \in \mathbb{C}$ fest und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = \begin{cases} 1 & |z_0 - c| < r, \\ 0 & |z_0 - c| > r \end{cases}$$

nach Definition 17.1 zusammen mit der obigen Anmerkung.

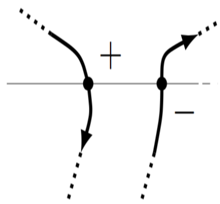


Der Index kann geometrisch gelesen werden:

Satz 17.2

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, der die negative Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ genau $n + m$-mal durchkreuzt, also n-mal mathematisch positiv (d.h. von oben nach unten) und m-mal mathematisch negativ (d.h. von unten nach oben). Dann ist

$$\operatorname{ind}_0(\gamma) = n - m\,.$$



Beweis: Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals können wir γ durch

$$\psi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, (t, s) \mapsto \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} + (1 - s)\gamma(t)$$

in den Weg

$$\gamma' : [a, b] \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, t \mapsto \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

stetig deformieren (Projektion auf der Einheitskreislinie), so dass $\operatorname{ind}_0(\gamma) = \operatorname{ind}_0(\gamma')$. Damit kreuzt γ' die negative Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$ genau n-mal von oben nach unten, bzw. m-mal von unten nach oben, etwa in $a =: t_0 < t_1 < \ldots < t_r < t_{r+1} := b$, und

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma') = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma([a,t_1])} \frac{dz}{z} + \sum_{i=1}^{r-1} \int_{\gamma([t_i,t_{i+1}])} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma([t_r,b])} \frac{dz}{z}\right).$$

Ist die Kreuzungsrichtung bei t_{i+1} entgegen zu der bei t_i, so ist $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ homotop zum trivialen Weg, also ist das Wegintegral $\int_{\gamma([t_i,t_{i+1}])} \frac{dz}{z} = 0$. Sind die Kreuzungsrichtungen bei t_i, t_{i+1} gleich, so ist $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$

homotop zum einfachen Umlauf um 0, in positiver oder negativer Richtung. Es bleiben also genau $n-m$ positive Umläufe oder $m-n$ negative Umläufe. Nach Beispiel 11 ist der Wert des Integrals $\pm 2\pi i$ (bzw.). Insgesamt erhalten wir also $\mathrm{ind}_0(\gamma) = \mathrm{ind}_{z_0}(\gamma') = \frac{1}{2\pi i}(\pm 2\pi i(\pm(n-m))) = n-m$. ■

Definition 17.3 (*Residuum*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f, und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurent-Entwicklung von f um z_0 auf $A_{0,R}(z_0) \subseteq D$ für ein $R > 0$. Dann heißt

$$\mathrm{res}_{z_0} f := a_{-1}$$

das **Residuum** von f um z_0.

Lemma 17.4

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f und g.

(a) Das Residuum ist $\mathbb{C}$-linear, d.h.

$$\mathrm{res}_{z_0}(af + bg) = a\,\mathrm{res}_{z_0} f + b\,\mathrm{res}_{z_0} g \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{C}\,.$$

(b) Hat f in z_0 eine Pollstelle der Ordnung höchstens $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ (d.h. ist $-m \leq \mathrm{ord}_{z_0} f$), so gilt

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$

Beweis: (a) Übung.

(b) Wegen $-m \leq \mathrm{ord}_{z_0} f$ hat f auf $A_{0,R}(z_0) \subseteq D$ eine eindeutig bestimmte Laurent-Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,.$$

Daraus folgt

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

und die $(m-1)$-te Ableitung ist

$$((z-z_0)^m f(z))^{(m-1)} = a_{-1}(m-1)(m-2)\cdots 1 + a_0 \cdot m(m-1)\cdots 2 \cdot (z-z_0) + \cdots\,.$$

Die Grenzwertbildung für $z \to z_0$ liefert die Formel der Aussage. ■

Beispiel 20

(a) Ist z_0 hebbar (also f holomorph in z_0), so ist die Laurent-Reihe von f auf $A_{0,R} \subseteq D$ eine Potenzreihe. Daher ist $\mathrm{res}_{z_0} f = 0$.

(b) Nach Definition ist

$$\mathrm{res}_0\left(\frac{\sin z}{z^4}\right) = \mathrm{res}_0\left(\frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)\right) = \mathrm{res}_0\left(z^{-3} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \frac{1}{5!}z + \ldots\right) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}\,.$$

(c) Nun hat $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ in $z_0 = 0$ eine Polstelle der Ordnung 3. Wir dürfen also $m = 4$ in Lemma 17.4(b) wählen und damit gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(4-1)!} \cdot \lim_{z\to 0} \Big((z-0)^4 f(z)\Big)^{(4-1)} &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{z\to 0} z^4 \left(z^4 \frac{\sin z}{z^4}\right)^{(3)} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{z\to 0} \sin^{(3)}(z) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{z\to 0}(-\cos z) \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \cos(0) = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Wir können nun den zentralen Satz der Vorlesung beweisen:

Satz 17.5 (*Residuensatz*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots, z_m \in D$ endlich viele Punkte (also $m \in \mathbb{N}_0$), und $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_{z_k}(\gamma) \cdot \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Beachte: Der Fall $m = 0$ ist dabei erlaubt und liefert $\int_\gamma f(z)dz = 0$, wie mit Hilfe der Homotopieinvarianz des Wegintegrals bewiesen wurde.

Beweis: Entwickle f in jedem Punkt z_k in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)}(z-z_k)^n}_{=:f_k^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)}(z-z_k)^n}_{=:f_k^+(z)}.$$

Da die Punkte z_k isolierte Singularitäten sind, konvergiert jeder Hauptteil f_k^- auf ganz $D \setminus \{z_k\}$. Daraus folgt, dass die Funktion

$$g : D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto g(z) := f(z) - f_1^-(z) - \ldots - f_m^-(z)$$

holomorph ist und per Konstruktion in allen z_k's holomorph fortsetzbar, da die Laurent-Entwicklung von g um jeden Punkt z_k auf einer punktierten Umgebung per Konstruktion von g eine Potenzreihe ist. Somit ist g auf ganz D holomorph (fortsetzbar). Da D einfach zusammenhängend ist, gilt:

$$\begin{aligned}0 \overset{\text{Bem. 8.2(b)}}{=} \int_\gamma g(z)dz &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_\gamma f_k^-(z)dz \\ &= \int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_\gamma (z-z_k)^n dz \\ &\overset{\substack{\text{Def. des}\\ \text{Index}}}{=} \int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{ind}_{z_k}(\gamma),\end{aligned}$$

da $\int_\gamma (z-z_k)^n dz = 0$ für $n \neq -1$ ist. Somit ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \operatorname{ind}_{z_k}(\gamma) \cdot \operatorname{res}_{z_k} f$$

nach Definition des Residuums. ∎

Definition 17.6 (*Randkurve, Inneres/Äußeres*)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ heißt **Randkurve**, wenn $\operatorname{ind}_z(\gamma) \in \{0, 1\}$ für alle $z \in D \setminus \gamma([a, b])$. Dann heißt

$$\operatorname{Int}(\gamma) := \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) \mid \operatorname{ind}_z(\gamma) = 1\},$$

$$\operatorname{Ext}(\gamma) := \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) \mid \operatorname{ind}_z(\gamma) = 0\}$$

das **Innere** bzw. das **Äußere** von γ.

Z.B. ist die Einheitskreislinie eine Randkurve nach Beispiel 19.

Folgerung 17.7 (*Residuensatz für Randkurven*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ auf D bis auf endlich viele isolierte Singularitäten holomorph. Ist γ eine Randkurve in D, die die Singularitäten nicht trifft, so ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z \in \operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{res}_z f .$$

Beachte: Die Summe ist endlich, da $\operatorname{res}_z f = 0$ für jeden nicht singulären Punkt z ist.

Beweis: Wende den Residuensatz an. Dabei ist

$$\operatorname{ind}_z f = \begin{cases} 1 & z \in \operatorname{Int}(\gamma), \\ 0 & z \notin \operatorname{Int}(\gamma) \end{cases}$$

nach Definition. Daraus folgt die Formel. ■

Kapitel 6: Anwendungen des Residuensatzes

18 Berechnung reeller Integrale

In diesem Abschnitt wenden wir den Residuensatz an, um reelle Integrale zu bestimmen. Natürlich kann man nicht erwarten, daß alle reellen Integranden mit komplexen Methoden behandeln zu können. Wir betrachten hier zwei wichtige Klassen von Integranden.

Anwendung A (***Integrale der Form*** $\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$)

Sei f eine reelle rationale Funktion in zwei Variablen, die die Einschränkung auf $\mathbb{R}^2$ einer komplexen rationalen Funktion f ist, d.h.

$$f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{mit } P, Q \in \mathbb{C}[x,y].$$

Ferner nehmen wir an, dass $Q(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$.
Für $\theta \in \mathbb{R}$ ist $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ und $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$. Daher setzen wir $z := e^{i\theta}$. Es gilt

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \quad \text{also} \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

und nach dem Residuensatz für Randkurven ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)d\theta &= \int_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)\frac{dz}{iz} \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{res}_z \left[\frac{1}{iz}\frac{P\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)}{Q\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)}\right],\end{aligned}$$

wobei γ die Einheitskreislinie ist.

Beispiel 21

Wir betrachten das Integral

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\sin\theta} d\theta.$$

Nach Anwendung A gilt:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{5+4\cdot\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}\cdot\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}dz = \int_{|z|=1}\frac{1}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)}dz\,.$$

Es gibt zwei Polstellen der Ordnung 1: $\frac{-i}{2} =: z_1$ und $-2i =: z_2$. Bezeichnet $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ die Kreislinie $|z| = 1$, so ist $z_1 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ und $z_2 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Außerdem gilt

$$\mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)}\right) \overset{\text{Lem. 17.4(b)}}{=} \left((z+\frac{i}{2})\frac{1}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)}\right)\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{2(-\frac{i}{2}+2i)} = \frac{1}{3i}$$

Nach dem Residuensatz für Randkurven ist nun

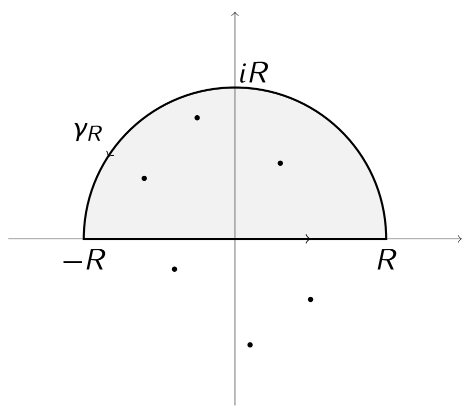
$$I = 2\pi i\cdot\mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{2(z+\frac{i}{2})(z+2i)}\right) = \frac{2\pi i}{3i} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Anwendung B (*Unbestimmte reelle Integrale der Form $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$*)

Sei $f(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ eine rationale reelle Funktion mit $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, die auf $\mathbb{R}$ keine Polstellen hat. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die **obere Halbebene**. Wir betrachten den Weg

$$\gamma_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it} \qquad (R \in \mathbb{R}_{>0})\,.$$

Wir setzen $\Gamma_R := [-R, R] \oplus \gamma_R$ und nehmen an, dass R gross genug ist, so dass alle Polstellen von f in $\mathbb{H}$ im Inneren von Γ_R liegen.



Nach dem Residuensatz für Randkurven gilt

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{z\in\mathrm{Int}(\Gamma_R)}\mathrm{res}_z f\,.$$

Das zweite Integral schätzen wir mit Bemerkung 7.1 nach oben ab und erhalten

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq L(\gamma_R)\cdot\max_{|z|=R}|f(z)|.$$

Aus $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ folgt $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\rho > 0$ mit: $|z| \geq \rho \Longrightarrow |zf(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$, also $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi|z|}$. Damit ist

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| < \pi R \cdot \frac{\varepsilon}{\pi R} = \varepsilon$$

und es gilt

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0\,.$$

Wir erhalten also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{z\in \mathrm{Int}(\Gamma_R)} \mathrm{res}_z\, f\,.$$

Beispiel 22

Wir betrachten das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx\,.$$

Dazu setze

$$f(z) := \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}\,.$$

Es gibt zwei Polstellen der Ordnung 1: $i =: z_1$ und $-i =: z_2$, wobei nur z_1 in $\mathbb{H}$ liegt. Nach Lemma 17.4(b) gilt

$$\mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right) = \left((z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right)\Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{2i}\,.$$

Nach Anwendung B gilt

$$I = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi\,.$$

Anmerkung 18.1

Die gleiche Methode läßt sich manchmal auch auf nicht-rationale Funktionen anwenden. Z.B.: Ist f eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat und deren Nennergrad wenigstens eins größer als der Zählergrad ist, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \cdot \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f(z)e^{iz})\,.$$

19 Abzählen von Null- und Polstellen

Wieviele Null- bzw. Polstellen hat eine Funktion in einem Gebiet? Mithilfe des Residuensatzes kann diese Frage auf ein Wegintegral zurückgeführt werden.

Dafür brauchen wir zunächst eine weitere Rechenregel für Residuen:

Lemma 19.1

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f. Ist $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq \pm\infty$, so ist

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) = \mathrm{res}_{z_0} \frac{f'}{f} .$$

Beweis: Setze $m := \mathrm{ord}_{z_0}(f) \neq \pm\infty$. Nach Bemerkung 16.2 ist

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

mit g holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ und $g(z_0) \neq 0$. Daraus folgt:

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \cdot g(z) + (z - z_0)^m \cdot g'(z) ,$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} .$$

Aus der $\mathbb{C}$-Linearität des Residuums folgt:

$$\mathrm{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = m \cdot \underbrace{\mathrm{res}_{z_0} \frac{1}{z - z_0}}_{=1} + \underbrace{\mathrm{res}_{z_0} \frac{g'}{g}}_{=0} = m ,$$

da $\frac{g'}{g}$ holomorph ist. ■

Wir erhalten damit das folgende Null- und Polstellen zählende Integral, das Null- und Polstellen sogar mit Vielfachheiten zählt.

Satz 19.2

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf D bis auf endlich viele Polstellen holomorph ist. Weiter sei γ eine Randkurve in D, die keine Nullstelle oder Polstelle von f trifft. Dann gilt

$$\sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Beweis: Der Residuensatz für Randkurven liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{res}_z \frac{f'}{f} \overset{\text{Lem. 19.1}}{=} \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) .$$

■

Anmerkung 19.3

Unter den Voraussetzungen von Satz 19.2 gilt auch

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{w} dw \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{ind}_0(f \circ \gamma)$$

(mit der Substitution $w := f(z)$).
Somit ist

$$\sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) = \mathrm{ind}_0(f \circ \gamma)\,,$$

d.h. die Anzahl der Null-/Polstellen von f mit Vielfachheit = die Umlaufzahl um 0 des Weges $f \circ \gamma$.

Beispiel 23

Die Funktion $f(z) = z^n$ $(n \geq 0)$ hat nur in 0 eine Nullstelle der Ordnung n.
Ist $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ $(r \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig) eine Randkurve um 0, so ist die Umlaufzahl von $f \circ \gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r^n e^{nit}$ um 0 ebenfalls n. Wir rechnen nach

$$\sum_{z \in B_r(0)} \mathrm{ord}_z(f) = \mathrm{ind}_0(f \circ \gamma) = n\,,$$

da $\mathrm{Int}(\gamma) = B_r(0)$ ist.

Satz 19.4 (*Rouché*)

Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $f, g, : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen und γ eine Randkurve in D. Gilt $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ für alle z auf der Spur von γ, so ist

$$\sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(f) = \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{ord}_z(g)\,.$$

Beweis: Für $t \in [0, 1]$ definiere die holomorphe Funktion

$$h_t : D \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto g(z) + t(f(z) - g(z)\,.$$

Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$ und alle $z \in D$:

$$|h_t(z)| = |g(z) + t(f(z) - g(z))| \geq |g(z)| - |t| \cdot |f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0\,.$$

Damit hat h_t keine Nullstelle auf der Spur von γ und nach Satz 19.2 zählt

$$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz$$

die Nullstellen von h_t in D. Da h_t stetig ist, ist $N(t)$ stetig in t und auch ganzzahlig, so dass $N(t)$ konstant ist. Damit ist $N(0) = N(1)$, also haben f und g gleichviele Nullstellen in D. ■

Mit Satz von Rouché können wir jetzt den Fundamentalsatzes der Algebra neu beweisen.

Satz 19.5 (*Fundamentalsatz der Algebra*)

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: O.B.d.A. können wir annehmen, dass der Leitkoeffizient von f gleich 1 ist, d.h.

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z] \text{ mit } n \geq 1\,.$$

Setze $g(z) := z^n$. Dann ist

$$f(z) - g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\,, \text{ also ein Polynom vom Grad } m \leq n - 1$$

Also ist $0 \leq m \leq n-1$, und es gilt

$$|f(z) - g(z)| = |a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0| = |z^m(a_m + \cdots + a_0 z^{-m})| = |z^m| \cdot \underbrace{|a_m + \cdots + a_0 z^{-m}|}_{=:R(z)} .$$

Da $\lim_{|z|\to+\infty} R(z) = |a_m|$ ist, existiert für $c := |a_m| + 1$ ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^m \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq r .$$

Sei nun γ die Kreislinie um 0 vom Radius $R := \max(r, c+1)$. Für z auf der Spur von γ gilt $|z| = R$ und

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^m < |z| \cdot |z|^m < |z|^n = |g(z)| \quad \forall\, z \in \mathrm{Spur}(\gamma) ,$$

da $R > c > 1$ ist. Nach dem Satz von Rouché haben dann f und g gleichviele Nullstellen vom Betrag höchstens R, nähmlich n. Damit hat f genau n Nullstellen. ■

Beispiel 24

Betrachte das Polynom $f(z) = z^5 - 4z + 2$. (Die Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ ist S_5, so dass die Nullstellen nicht durch Wurzelausdrücke darstellbar sind. Siehe Vorlesung Einführung in die Algebra.)

Nach Satz 19.5 besitzt f genau 5 Nullstellen. Wo liegen diese in $\mathbb{C}$?

Wie im Beweis von Satz 19.5 wähle $g(z) := z^5$. Es folgt

$$|f(z) - g(z)| = |4z - 2| \leq 4|z| + 2 = 10 < 2^5 = |g(z)| \qquad \text{für } |z| = 2 .$$

Also liegen alle fünf komplexen Nullstellen von f im Kreis um 0 vom Radius 2.
Wähle jetzt $|z| = 1$, $g(z) = 4z$. Somit ist

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + 2| \leq |z^5| + 2 = 3 < 4 = |4z| = |g(z)|$$

und im Kreis um 0 vom Radius 1 liegt nur <u>eine</u> Nullstelle von f.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}[X]$	Polynomring über $\mathbb{C}$ in einer Unbestimmten X
$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{N}_0$	die natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}_{\geq a}, \mathbb{R}_{>a}, \mathbb{R}_{\leq a}, \mathbb{R}_{<a}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a$ (bzw. $x > a, x \leq a, x < a)\}$
$\mathbb{Z}_{\geq a}, \mathbb{Z}_{>a}, \mathbb{Z}_{\leq a}, \mathbb{Z}_{<a}$	$\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq a$ (bzw. $m > a, m \leq a, m < a)\}$
$B_r(z_0)$	offene Kreisscheibe um z_0 vom Radius r
$A_{r,R}(z_0)$	offener Kreisring um z_0 von Radien r und R
$\overline{B}$	Abschluss der Menge B
∂B	Rand der Menge B
$\operatorname{Ext}(\gamma)$	Äußere von γ
i	$\sqrt{-1}$ in $\mathbb{C}$
$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma)$	Index/Umlaufzahl von γ um z_0
$\operatorname{Int}(\gamma)$	das Innere von γ
$n!$	n Fakultät
$\operatorname{ord}_{z_0}(f)$	Ordnung von f in z_0
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	Real-, Imaginärteil der komplexen Zahl z
$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$	Real-, Imaginärteil der komplexen Funktion f
$\operatorname{res}_{z_0} f$	Residuum von f um z_0
$\overline{z}$	konjugiert komplexe Zahl
$\lvert z \rvert$	Betrag der komplexen Zahl z
$\gamma \oplus \tilde{\gamma}$	Zusammensetzung zweier Wege γ und $\tilde{\gamma}$
γ^-	Rückwärts durchgelaufene Kurve
$L(\gamma)$	Bogenlänge des Weges γ
$\int_\gamma$	Wegintegral längs γ
$\int_a^b$	Integral von a nach b
$\bigcup$	Vereinigung
$\bigsqcup$	disjunkte Vereinigung
$\times$	kartesisches Produkt
$\bigcap$	Schnitt
$\emptyset$	leere Menge