Ringvorlesung SS24: Endliche Gruppen und Ihre Darstellungstheorie

JProf. Dr. Caroline Lassueur

11. Juli 2024

Die *AMS Mathematics Subject Classification 2020*

Die *AMS Mathematics Subject Classification 2020*

Die *Mathematics Subject Classification* (MSC) ist eine Klassifikation für die Bereiche der Mathematik. Sie wird von der *American Mathematical Society* herausgegeben. Jedes Buch und jeder mathematische Artikel wird mit einer oder mehreren Klassen zwischen **00** und **97** versehen, die ihn einem mathematischen Teilgebiet zuordnen.

Die *AMS Mathematics Subject Classification 2020*

Die *Mathematics Subject Classification* (MSC) ist eine Klassifikation für die Bereiche der Mathematik. Sie wird von der *American Mathematical Society* herausgegeben. Jedes Buch und jeder mathematische Artikel wird mit einer oder mehreren Klassen zwischen **00** und **97** versehen, die ihn einem mathematischen Teilgebiet zuordnen.

Die **Gruppentheorie** und die **Darstellungstheorie** gehören zu den Klassen **20** bzw. **18**.

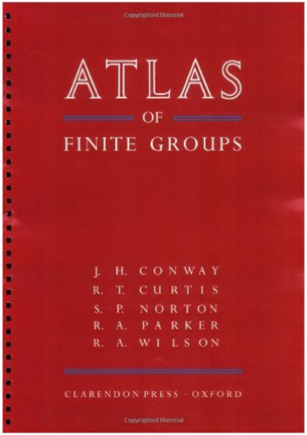
Die *AMS Mathematics Subject Classification 2020*

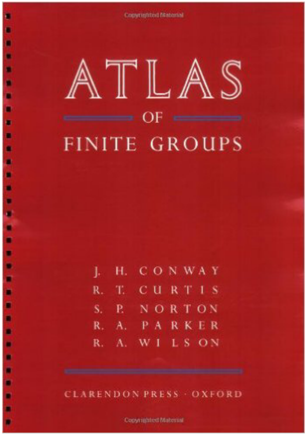
Die *Mathematics Subject Classification* (MSC) ist eine Klassifikation für die Bereiche der Mathematik. Sie wird von der *American Mathematical Society* herausgegeben. Jedes Buch und jeder mathematische Artikel wird mit einer oder mehreren Klassen zwischen **00** und **97** versehen, die ihn einem mathematischen Teilgebiet zuordnen.

Die **Gruppentheorie** und die **Darstellungstheorie** gehören zu den Klassen **20** bzw. **18**.

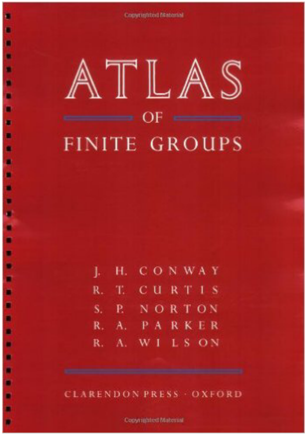
Siehe: https://zbmath.org/classification/

Ein Werkzeug: Der ATLAS der endlichen Gruppen



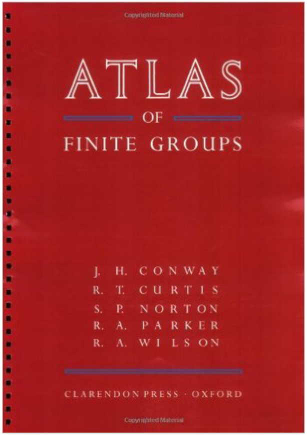


Veröffentlicht: Dezember 1985, von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker and R. Wilson.



Veröffentlicht: Dezember 1985, von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker and R. Wilson.

Enthählt Information über die 93 *kleinsten* **nichtableschen einfachen endlichen Gruppen**.



Veröffentlicht: Dezember 1985, von J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker and R. Wilson.

Enthählt Information über die 93 *kleinsten* **nichtableschen einfachen endlichen Gruppen**.

Z.B.: Ordnungen, maximale Untergruppen, Automorphismen, Konjugiertenklassen,. . .
und Charaktertafeln!

Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

SATZ (Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen)
Eigenschaft **(E)** gilt für alle endlichen Gruppen, falls Eigenschaft **(E)** für alle *einfachen* endlichen Gruppen gilt.

Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

SATZ (Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen)
Eigenschaft **(E)** gilt für alle endlichen Gruppen, falls Eigenschaft **(E)** für alle *einfachen* endlichen Gruppen gilt.

Konsequenz: Man muss die **einfachen endlichen Gruppen** so gut wie möglich verstehen!

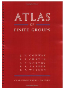
Eine allgemeine Strategie in der Gruppentheorie:

Viele Sätze der Gruppentheorie lassen sich durch Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen behandeln. D.h. viele Sätze sehen so aus:

> **SATZ (Reduktion auf den Fall der einfachen Gruppen)**
> Eigenschaft **(E)** gilt für alle endlichen Gruppen, falls Eigenschaft **(E)** für alle *einfachen* endlichen Gruppen gilt.

Konsequenz: Man muss die **einfachen endlichen Gruppen** so gut wie möglich verstehen!

$\rightsquigarrow$ Bedeutung der ATLAS



Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

-
-
-
-

Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
-
-
-

Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
-
-

Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
- die **Gruppen von Lie-Typ** über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (16 jeweils unendliche Familien): $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PGU}_n(q)$, $\mathrm{O}_{2n}^{\pm}(q)$, ...
-

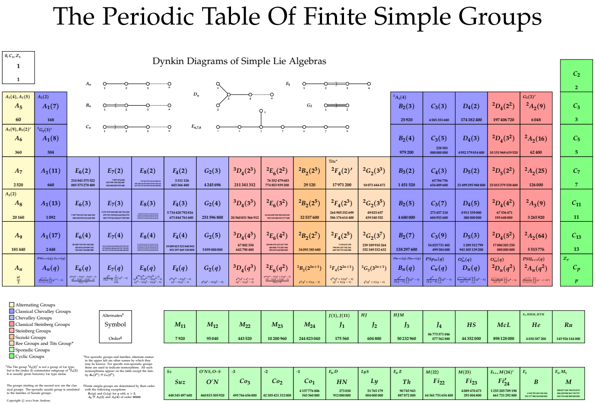
Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
- die **Gruppen von Lie-Typ** über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (16 jeweils unendliche Familien): $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PGU}_n(q)$, $\mathrm{O}^{\pm}_{2n}(q)$, $\ldots$
- **26 sporadischen Gruppen**: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Co_1, Co_2, Co_3, He, McL, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ly, Ru, $O'N$, Th, HN, B ("Baby Monster") und M ("Monster")

Die endlichen einfachen Gruppen lassen sich in den folgenden Familien einteilen:

- die **zyklischen Gruppen von Primzahlordnung**: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit $p \in \mathbb{P}$
- die **alternierenden Gruppen**: A_n mit $n \geq 5$
- die **Gruppen von Lie-Typ** über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ (16 jeweils unendliche Familien): $\mathsf{PSL}_n(q)$, $\mathsf{PGU}_n(q)$, $\mathsf{O}_{2n}^{\pm}(q)$, $\ldots$
- **26 sporadischen Gruppen**: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Co_1, Co_2, Co_3, He, McL, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ly, Ru, $O'N$, Th, HN, B ("Baby Monster") und M ("Monster")

Dauer: 1832 (Galois) – 1983 (Gorenstein) (oder eher 2008 (Harada-Solomon))


The Periodic Table Of Finite Simple Groups
Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras
A_5 60
A_6 360
A_7 2 520
A_8 20 160
A_9 181 440
A_n $\frac{n!}{2}$
$A_1(7)$ 168
$A_1(8)$ 504
$A_1(11)$ 660
$A_1(13)$ 1 092
$A_1(17)$ 2 448
$A_n(q)$
$E_6(2)$
$E_6(3)$
$E_6(4)$
$E_6(q)$
$E_7(2)$
$E_7(3)$
$E_7(4)$
$E_7(q)$
$E_8(2)$
$E_8(3)$
$E_8(4)$
$E_8(q)$
$F_4(2)$
$F_4(3)$
$F_4(4)$
$F_4(q)$
$G_2(3)$ 4 245 696
$G_2(4)$ 251 596 800
$G_2(5)$ 5 859 000 000
$G_2(q)$
${}^3D_4(2^3)$ 211 341 312
${}^3D_4(3^3)$
${}^3D_4(4^3)$
${}^3D_4(q^3)$
${}^2E_6(2^2)$
${}^2E_6(3^2)$
${}^2E_6(4^2)$
${}^2E_6(q^2)$
${}^2B_2(2^3)$ 29 120
${}^2B_2(2^5)$ 32 537 600
${}^2B_2(2^7)$ 34 093 383 680
${}^2B_2(2^{2n+1})$
${}^2F_4(2)'$ 17 971 200
${}^2F_4(2^3)$
${}^2F_4(2^5)$
${}^2F_4(2^{2n+1})$
${}^2G_2(3^3)$ 10 073 444 472
${}^2G_2(3^5)$
${}^2G_2(3^7)$
${}^2G_2(3^{2n+1})$
$B_2(3)$ 25 920
$B_2(4)$ 979 200
$B_3(2)$ 1 451 520
$B_2(5)$ 4 680 000
$B_2(7)$ 138 297 600
$B_n(q)$
$C_3(3)$
$C_3(5)$
$C_4(3)$
$C_3(7)$
$C_3(9)$
$C_n(q)$
$D_4(2)$ 174 182 400
$D_4(3)$
$D_5(2)$
$D_4(5)$
$D_5(3)$
$D_n(q)$
${}^2D_4(2^2)$ 197 406 720
${}^2D_4(3^2)$
${}^2D_5(2^2)$
${}^2D_4(4^2)$
${}^2D_4(5^2)$
${}^2D_n(q^2)$
${}^2A_2(9)$ 6 048
${}^2A_2(16)$ 62 400
${}^2A_2(25)$ 126 000
${}^2A_3(9)$ 3 265 920
${}^2A_2(64)$ 5 515 776
${}^2A_n(q^2)$
C_2 2
C_3 3
C_5 5
C_7 7
C_{11} 11
C_{13} 13
C_p p
M_{11} 7 920
M_{12} 95 040
M_{22} 443 520
M_{23} 10 200 960
M_{24} 244 823 040
J_1 175 560
J_2 604 800
J_3 50 232 960
J_4
HS 44 352 000
McL 898 128 000
He 4 030 387 200
Ru 145 926 144 000
Suz 448 345 497 600
$O'N$ 460 815 505 920
Co_3 495 766 656 000
Co_2 42 305 421 312 000
Co_1
HN
Ly
Th
Fi_{22} 64 561 751 654 400
Fi_{23}
Fi'_{24}
B
M
Alternating Groups
Classical Chevalley Groups
Chevalley Groups
Classical Steinberg Groups
Steinberg Groups
Suzuki Groups
Ree Groups and Tits Group*
Sporadic Groups
Cyclic Groups
Alternates†
Symbol
Order‡
Copyright © 2012 Ivan Andrus

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.
Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION
Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Anmerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Anmerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen $\Longrightarrow$ Computeralgebra!

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Anmerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen $\Longrightarrow$ Computeralgebra!
- Es gibt einen Begriff von **Isomorphie** für Darstellungen und einen Begriff von **irreduzibilität** (d.h.: ist nicht die Summe zweier kleineren Darstellungen)

DARSTELLUNGEN EINER GRUPPE.

Ab jetzt ist G eine endliche Gruppe und $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen.

DEFINITION

Eine **Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Anmerkungen:

- ρ injektiv $\Longrightarrow$ kann man Gruppen als **"Gruppen von Matrizen"** sehen ($\Longrightarrow$ Computeralgebra!)
- Es gibt einen Begriff von **Isomorphie** für Darstellungen und einen Begriff von **irreduzibilität** (d.h.: ist nicht die Summe zweier kleineren Darstellungen)
- Bis auf Isomorphie, hat eine endliche Gruppe G nur endlich viele Darstellungen.

SATZ
$\#\{$irred. Darstellungen von G bis auf Isom.$\} = \#\{$Konjugiertenklassen von $G\} =: r$

SATZ

$\#\{\text{irred. Darstellungen von } G \text{ bis auf Isom.}\} = \#\{\text{Konjugiertenklassen von } G\} =: r$

In der Tat kann man viele Eigenschaften der Gruppen und ihre Darstellungen durch ihre **Charaktere** bestimmen:

SATZ
$\#\{\text{irred. Darstellungen von } G \text{ bis auf Isom.}\} = \#\{\text{Konjugiertenklassen von } G\} =: r$

In der Tat kann man viele Eigenschaften der Gruppen und ihre Darstellungen durch ihre **Charaktere** bestimmen:

DEFINITION
Sei $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine **Darstellung** von G. Die Abbildung

$$\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \mathrm{Spur}(\rho(g))$$

heisst **Charakter** der Darstellung ρ.

DEFINITION
Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C})\,,$$

wobei $\chi_1,\ldots,\chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1,\ldots,g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

DEFINITION
Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C})\,,$$

wobei $\chi_1,\ldots,\chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1,\ldots,g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

BEISPIELE.

DEFINITION
Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C})\,,$$

wobei $\chi_1,\ldots,\chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1,\ldots,g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

BEISPIELE.

1. Die Kleinsche Vierergruppe $G=C_2\times C_2=\langle g\rangle\times\langle h\rangle$ mit $g^2=1, h^2=1, gh=hg$.

DEFINITION
Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix

$$(\chi_i(g_j))_{1\leq i,j\leq r} \in M_{r\times r}(\mathbb{C}),$$

wobei $\chi_1,\ldots,\chi_r$ die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind, und wobei $g_1,\ldots,g_r$ ein Vetretersystem der Konjugiertenklassen von G ist.

BEISPIELE.

1. Die Kleinsche Vierergruppe $G = C_2\times C_2 = \langle g\rangle\times\langle h\rangle$ mit $g^2=1, h^2=1, gh=hg$.

$C_2\times C_2$	1	g	h	gh
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	1	-1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

2.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	1	g	g^2	$\cdots$	g^{n-1}
$\chi_1 = \mathbf{1_G}$	1	1	1	$\ldots$	$\mathbf{1}$
χ_2	1	ζ	ζ^2	$\ldots$	ζ^{n-1}
χ_3	1	ζ^2	ζ^4	$\ldots$	$\zeta^{2(n-1)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
χ_n	1	ζ^{n-1}	$\zeta^{2(n-1)}$	$\ldots$	$\zeta^{(n-1)^2}$

$\zeta :=$ primitive $n -$ th root of unity

2.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	1	g	g^2	$\cdots$	g^{n-1}
$\chi_1 = \mathbf{1_G}$	1	1	1	$\ldots$	**1**
χ_2	1	ζ	ζ^2	$\ldots$	ζ^{n-1}
χ_3	1	ζ^2	ζ^4	$\ldots$	$\zeta^{2(n-1)}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
χ_n	1	ζ^{n-1}	$\zeta^{2(n-1)}$	$\ldots$	$\zeta^{(n-1)^2}$

$\zeta :=$ primitive $n-$th root of unity

S_3	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Beispiel: Die Charaktertafel von A_5

Im ATLAS-Format ist die Charaktertafel der alternierenden Gruppe A_5:

	$1a$	$2a$	$3a$	$5a$	$5b$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	A	$*A$
χ_3	3	-1	0	$*A$	A
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

$$A = (1-\sqrt{5})/2, \qquad *A = (1+\sqrt{5})/2$$

$$1 \in 1a, \quad (1,2)(3,4) \in 2a, \quad (1,2,3) \in 3a,$$
$$(1,2,3,4,5) \in 5a, \quad (1,3,5,2,4) \in 5b$$

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1 \ \forall \chi$ irred. char. of G)

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1 \;\forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1 \;\forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow \chi(g) \neq \chi(1) \;\forall\, g \in G \setminus \{1\}, \forall\, \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \ \forall\ g \in G \setminus \{1\}, \forall\ \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \forall\ g \in G \setminus \{1\}, \forall\, \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,. . .)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- . . .

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \forall\, g \in G \setminus \{1\}, \forall\, \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- ...

ABER die folgenden Eigenschaften können NICHT von der Charaktertafel gelesen werden:

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \forall\ g \in G \setminus \{1\}, \forall\ \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- ...

ABER die folgenden Eigenschaften können NICHT von der Charaktertafel gelesen werden:

- G bis auf Isomorphie (Z.B.: D_8 und Q_8 haben dieselben Charaktertafel!)

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \forall\, g \in G \setminus \{1\}, \forall\, \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- ...

ABER die folgenden Eigenschaften können NICHT von der Charaktertafel gelesen werden:

- G bis auf Isomorphie (Z.B.: D_8 und Q_8 haben dieselben Charaktertafel!)
- alle Untergruppen

Die folgenden Eigenschaften können von der Charaktertafel einer endlichen Gruppe G gelesen werden:

- Kommutativität (G abelsch $\Leftrightarrow \chi(1) = 1\ \forall\, \chi$ irred. char. of G)
- $|G|$ (Gradformel: $|G| = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)^2$)
- Einfachkeit (G einfach $\Leftrightarrow\ \chi(g) \neq \chi(1)\ \forall\ g \in G \setminus \{1\}, \forall\ \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \{1_G\}$)
- alle Normalteiler (insbesondere.: $[G, G]$, $Z(G)$, $\Phi(G)$,...)
- Primfaktoren der Ordnungen von allen Elementen
- ...

ABER die folgenden Eigenschaften können NICHT von der Charaktertafel gelesen werden:

- G bis auf Isomorphie (Z.B.: D_8 und Q_8 haben dieselben Charaktertafel!)
- alle Untergruppen
- Ordnungen der Elemente
- ...

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

Wir lesen:

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

Wir lesen:

- $|G| = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \ldots = 168\,$;
- G ist nicht abelsch;

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

Wir lesen:

- $|G| = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \ldots = 168\,;$
- G ist nicht abelsch;
- G ist einfach

$\Rightarrow$ G ist die einzige einfache Gruppe der Ordnung 168,
d.h. $G = \mathsf{GL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{SL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

BEISPIEL:

	1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	1	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_3	3	-1	1	0	$\overline{\alpha}$	α
χ_4	6	2	0	0	-1	-1
χ_5	7	-1	-1	1	0	0
χ_6	8	0	0	-1	1	1

$\alpha := (-1 + i\sqrt{7})/2$

Wir lesen:

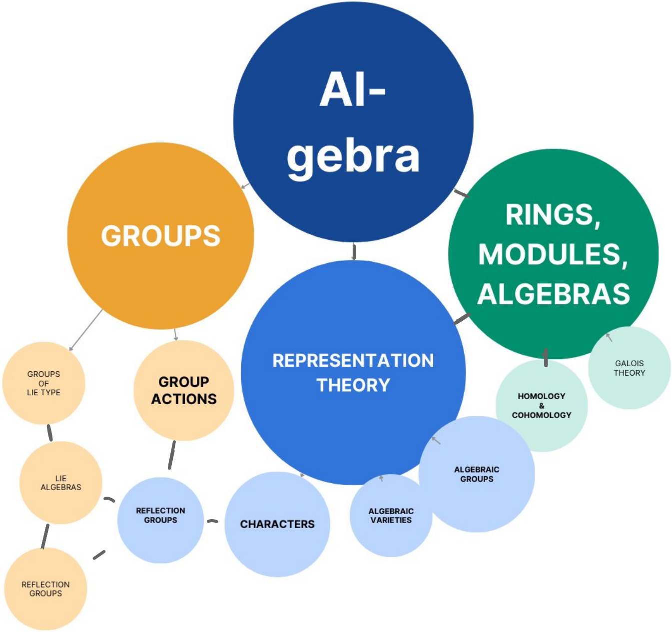
- $|G| = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \ldots = 168\,;$
- G ist nicht abelsch;
- G ist einfach

$\Rightarrow$ G ist die einzige einfache Gruppe der Ordnung 168,
d.h. $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

Eine aktuelle offene Forschungsfrage ist es:

Eine aktuelle offene Forschungsfrage ist es:

die Charaktertafeln der Gruppen vom Lie-Typ zu berechnen.



Al-
gebra
GROUPS
RINGS,
MODULES,
ALGEBRAS
REPRESENTATION
THEORY
GROUPS
OF
LIE TYPE
GROUP
ACTIONS
GALOIS
THEORY
HOMOLOGY
&
COHOMOLOGY
LIE
ALGEBRAS
REFLECTION
GROUPS
CHARACTERS
ALGEBRAIC
VARIETIES
ALGEBRAIC
GROUPS
REFLECTION
GROUPS