

**Aim:** Das Ziel dieses Seminars ist es, eine große Klasse von Gruppen – die **linearen algebraischen Gruppen** – einzuführen. Lineare algebraische Gruppen sind Gruppen, die gleichzeitig affine algebraische Varietäten sind, wobei beide Strukturen miteinander verträglich sein sollen. Sie spielen in vielen Bereichen der Mathematik eine wichtige Rolle (beispielsweise die Darstellungstheorie, die endlichen Gruppen, die Lie-Gruppen, die Lie-Algebren, ...). Insbesondere ermöglichten es sie die endlichen Gruppen vom Lie-Typ zu klassifizieren.

**Anmeldung und Fragen:** per E-Mail an [lassueur@mathematik.uni-kl.de](mailto:lassueur@mathematik.uni-kl.de) oder [lassueur@math.uni-hannover.de](mailto:lassueur@math.uni-hannover.de)

**Termin:** Mi. 16:15 – 17:45 Uhr (vorläufig)

**Vorbesprechung:** Am Mi. 25.10.2023 um 16:15 Uhr. Gebäude 1101, Raum G117.

**Inhaltliche Voraussetzung:** Lineare Algebra und elementare Gruppentheorie.

(Die Darstellungstheorie und die Algebraische Geometrie können hilfreich sein, aber sind nicht vorausgesetzt.)

$$C_G(T) = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|c} * & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ \hline 0 & & & A \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{GL}_{n-m} \right\} \cong D_m \times \mathrm{GL}_{n-m},$$

**Themen.** Das Seminar wird sich auf die folgenden Hauptthemen konzentrieren.

- Hintergrund: algebraische Mengen, die Zariski-Topologie, Irreduzibilität, Morphismen,
- Hintergrund: Tensorprodukt, Varietäten, geringte Räume
- Lineare algebraische Gruppen: Definitionen und Beispiele, die Affine Algebra
- Lineare algebraische Gruppen: zusammenhängende Gruppen, Dimension
- Die Jordan-Zerlegung, Diagonalisierbarkeit
- Unipotente algebraische Gruppen, kommutative algebraische Gruppen
- Nilpotente und auflösbare algebraische Gruppen
- Algebraische Darstellungen, Tori, Boreluntergruppen
- Die Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe
- Gruppen mit einem BN-Paar
- Struktursatz für reductive Gruppen
- Klassifikation der halbeinfachen Gruppen, Wurzelsysteme
- Frobeniusmorphisms, endliche Gruppen vom Lie Typ

---

## LITERATUR:

- [Gec03] Meinolf Geck. *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*. Vol. 10. Oxf. Grad. Texts Math. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [Las22] Caroline Lassueur. *Algebraische Gruppen*. Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen, WS 2021/22.
- [Mal19] Gunter Malle. *Linear Algebraic Groups*. Skript zur Vorlesung, TU Kaiserslautern, SS 2019.
- [MT11] Gunter Malle and Donna Testerman. *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*. Vol. 133. Camb. Stud. Adv. Math. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [Mül07] Jürgen Müller. *Algebraic Groups*. Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen, SS 2007.
- [Tay15] Jay Taylor. *Algebraic Groups*. Lecture Notes, Università degli Studi di Padova, SW 2014/15.

---

## TERMIN

Der Seminar findet als Blockseminar statt vom Di., den 19. März bis Fr., den 22. März statt.

---

## PROGRAMM

Das genauere Programm des Seminars finden Sie unten.

---

## DIENSTAG, den 19. März 2024

### 1. VORTRAG: Hintergrund — algebraische Geometrie I,

- Wir führen die folgenden Begriffen ein (bzw. wiederholen): Algebraische Mengen, die Zariski-Topologie, Irreduzibilität, Morphismen
- Referenzen: [Tay15, §1.1 bis §1.4] und [Mal19, §1].
- **Vortragender:** Tom Rudel

### 2. VORTRAG: Hintergrund — algebraische Geometrie II

- Wir führen die folgenden Begriffen ein (bzw. wiederholen): Reguläre Funktionen, Produkte, (Varietäten), Dimension
- Referenzen: [Tay15, §1.5 bis §1.9].
- **Vortragender:** ABGESAGT

---

## MITTWOCH, den 20. März 2024

### 3. VORTRAG: Lineare algebraische Gruppe — Definition und wichtige Beispiele

- Definitionen: Lineare algebraische Gruppen / Morphismen von linearen algebraischen Gruppen
- Beispiele:  $\mathbb{G}_a$ ,  $\mathbb{G}_m$ ,  $GL_n$ ,  $D_n$ ,  $B_n$ ,  $U_n$ ,  $SL_n$ ,  $O_n$ ,  $SO_n$ ,  $Sp_n$ , ...
- Referenzen: [Las22, Teil II, §1.1 und §1.4], [Mal19, §1 bis Ex.3 und §3], [MT11]
- **Vortragender:** Lasse Littwin

### 4. VORTRAG: Zusammenhangskomponenten, Untergruppen

- Zusammenhangskomponenten, die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements.
- Untergruppen und Morphismen
- Operationen algebraische Gruppen auf Varietäten / Bahnen / Zentralisatoren, Normalisatoren und Zentrum
- Referenzen: [Las22, Teil II, §1.1 und §1.4], [Mal19, §1 bis Ex.3 und §3], [MT11]
- **Vortragender:** Lyon Wolfgang Dorgelo

### 4'. VORTRAG: Einbettung in $GL_n$ (Fortsetzung vom 4. Vortrag)

- Rationale Darstellungen und Einbettung in  $GL_n$
  - **Vortragende:** Caroline Lassueur
-

---

## DONNERSTAG, den 21. März 2024

### 5. VORTRAG: Jordanzerlegung und kommutative Gruppen

- Die Jordanzerlegung
- Struktur der kommutativen Gruppen
- Referenzen: [Mal19, §2.1 und §2.2], [Tay15, §2.4], [MT11, §2.1 und §3.1], [Las22, §2.1 und §2.2]
- **Vortragende:** [Caroline Lassueur](#)

### 6. VORTRAG: Nilpotente und auflösbare Gruppen

- Nilpotente Gruppen
- Auflösbare Gruppen
- Unipotente Gruppen
- Referenzen: [Las22, §1.1 bis §3.3], [Mal19, §3.1 bis §3.3], [MT11, §4.1],
- **Vortragender:** [Till Müller](#)

---

## FREITAG, den 22. März 2024

### 7. VORTRAG: Boreluntergruppen und Tori

- Boreluntergruppen und Tori
- Struktur zusammenhängender, auflösbarer Gruppen
- Referenzen: [Las22, Teil V], [Mal19, Chapter 5]
- **Vortragender:** [Leon Lampe](#)

### 8. VORTRAG: Endliche Gruppen von Lie Typ

- Steinberg-Endomorphismen, Satz von Lang-Steinberg
- Endliche Gruppen von Lie Typ
- Referenzen: [MT11, §21, §22] (und evtl. Ergebnisse aus [MT11, §23, §24])
- **Vortragender:** [Erik Nikolov](#)